

La sistematización en la resolución de ecuaciones con vistas a la preparación para las Pruebas de Ingreso a la Educación Superior

Systematization equations resolution aimed to preparation for examination to entry in high education

MSc. Argelia González Portales. Profesora Asistente. Licenciada en Educación en la Especialidad de Matemática. Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona, Facultad de Educación en Ciencias Naturales y Exactas, Departamento Matemática – Física, La Habana, Cuba.

Teléfono celular: +53 58234426

Correo electrónico: argeliagp@ucpejv.rimed.cu

ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7407-9039>

RESUMEN

El objetivo central de esta contribución es exponer una experiencia en la asignatura Matemática en el trabajo con los estudiantes que se preparan en el Colegio Universitario de la UCP Enrique J. Varona, elaborada en función de promover un aprendizaje desarrollador en las clases de Matemática dedicadas a la sistematización en la resolución de ecuaciones. Se muestran las principales tendencias actuales de los errores de los estudiantes en las pruebas de años anteriores y los resultados de una estrategia para revertirlos. Se destaca además el papel que juegan las diferentes formas de presentar los ejercicios que se proponen en las clases de sistematización. En el texto se insiste en que brindar una adecuada preparación teórica y científica, mejora el desempeño futuro en la resolución de ecuaciones en las Pruebas de Ingreso a la Educación Superior y en que esta debe ser la premisa que nos encamina en la sistematización de estos contenidos en los estudiantes de duodécimo grado de la educación media.

Palabras clave: didáctica de la Matemática, sistematización, resolución de ecuaciones, preparación teórica y científica, Pruebas de Ingreso a la Educación Superior

ABSTRACT

The main objective of this contribution is to present an experience in the subject Mathematics at work with the students who are preparing in University College of the University of Pedagogical Science Enrique José Varona, elaborated in order to promote a developer learning in the dedicated Mathematics classes to the systematization in solving equations. The main current trends in student errors in previous years' Tests and the results of a strategy to reverse them are shown. The role played by the different ways of presenting the exercises proposed in the systematization classes is also highlighted. The text insists that providing adequate theoretical and scientific preparation improves future performance in solving equations in the Higher Education Entrance Tests and that this should be the premise that guides us in the systematization of these contents in twelfth grade high school students.

Keywords: dedicated Mathematics, systematization, solving equations, theoretical and scientific preparation, Higher Education Entrance Tests

Introducción

La necesidad de incrementar y perfeccionar la investigación en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática debe ser atendida constantemente y es que las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas no han perdido su vigencia ni su intensidad.

Por esto, hay consenso en expresar que las matemáticas en todos los niveles de enseñanza son una calamidad para los estudiantes.

Aun cuando esta afirmación pudiera parecer exagerada, no dista mucho en sentido general, de lo que piensan los profesores de la asignatura, al observar la pobre calidad del aprendizaje que se evidencia en los exámenes de Matemática a la Educación Superior.

Un análisis elemental de la situación general de la enseñanza de la Matemática, demuestra que está deficiente en la mayoría de los países del mundo.

En Cuba, la enseñanza de la Matemática descansa en sólidas bases científicas, con una marcada orientación hacia el desarrollo de la personalidad de los alumnos y con la aspiración de lograr una enseñanza desarrolladora.

No son nuevos ni escasos los intentos de los investigadores cubanos, en general se trata de esfuerzos valiosos para superar el dañino y enraizado método de enseñanza básicamente reproductiva.

¿Qué resultados se han obtenido en esa dirección? Se encuentran en elaboración e implementación cambios que se derivan de las numerosas investigaciones de nuestros incansables pedagogos. Se evalúan constantemente los resultados del aprendizaje, el estado y durabilidad de los conocimientos y su alcance a la interdisciplinaridad.

Uno de los grados donde se puede medir el resultado de tales investigaciones es el doce grado, al que se dedican numerosas clases a sistematizar los conocimientos adquiridos en los grados precedentes.

En la actualidad, se aprecia un cierto consenso en la idea de que el fracaso o el éxito de los estudiantes en las Pruebas de Ingreso a la Educación Superior dependen, fundamentalmente de la calidad del desempeño de los docentes.

El desarrollo científico-técnico y social de los últimos años ha influido en la transformación de los modelos pedagógicos, a partir de los que se han introducido cambios en las formas de producir y acceder al conocimiento y por consiguiente en los modos de actuación del profesor.

Desarrollo

Muchas veces la palabra sistematización es entendida (por su sentido común) como sinónimo de frecuencia, algo se ha sistematizado si se sigue un sistema fijo en su conducta.

En la Metodología de la Enseñanza de la Matemática, la sistematización se comprende como una forma de la fijación cuyo objetivo fundamental es estructurar un sistema de conocimientos mediante comparación de características que destacan lo esencial del saber y el poder, adquiridos por los alumnos. Su realización está estrechamente vinculada al análisis de propiedades comunes y diferentes y al establecimiento de nexos entre los conocimientos, que algunas veces pudieran parecer aislados, hasta organizarlos en un sistema.

La sistematización puede tener también carácter de repaso sistemático en función de aplicar lo aprendido.

La sistematización de los conocimientos constituye una tarea frecuente de los docentes en todos los grados pues en reiteradas ocasiones se sistematizan los

conocimientos en la asignatura y la nueva materia se desarrolla estrechamente relacionada con la aprendida en grados anteriores.

La sistematización toma gran significado en el preuniversitario, donde se profundizan los conocimientos matemáticos básicos de la formación matemática general y posteriormente es la principal herramienta en la preparación para las Pruebas de Ingreso a la Educación Superior.

Las actividades encaminadas a la sistematización logran su propósito, si los conocimientos de los alumnos quedan organizados en su mente, si cada conocimiento ha encontrado su lugar en la estructura del saber, se crean las condiciones para la fijación de un saber más sólido, el desarrollo de habilidades más generalizadas y para alcanzar mejores resultados en la aplicación de los conocimientos.

Es por esto que las clases dedicadas a la sistematización deben estar dirigidas a realizar un proceso de enseñanza aprendizaje con mayor calidad, esto es, lograr los más altos rendimientos posibles en la mayoría de los alumnos. Los objetivos que ellos alcancen serán la expresión de la labor realizada por sus profesores.

No es posible sistematizar los conocimientos que no se poseen. Esto quiere decir que una condición imprescindible para que pueda tener lugar la sistematización es la disponibilidad de los conocimientos que deben ser sistematizados. Por lo que resulta de gran importancia la reactivación de los conocimientos que sean necesarios a través de la resolución de ejercicios, que no quiere decir que se resuelvan ejercicios que solamente se dirijan a este fin, ya que esto es posible a partir de los propios ejercicios que se proponen para la sistematización.

Los conocimientos matemáticos en general se refieren a conceptos, proposiciones (en particular teoremas fórmulas, propiedades) y procedimientos (algorítmicos o heurísticos). Así es posible referirnos a la sistematización de conceptos, proposiciones y procedimientos matemáticos de forma especial o como frecuentemente es el caso, a la sistematización de los conocimientos matemáticos como una integración lógicamente estructurada de estos tres componentes del saber matemático.

En la escuela cubana al terminar el preuniversitario, los alumnos aprendieron a resolver ecuaciones lineales, cuadráticas, fraccionarias, con radicales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. Los alumnos aprendieron un procedimiento para resolver cada una de ellas. Las reflexiones de los alumnos al comparar estos procedimientos los debe conducir a la idea de que un procediendo está dentro del otro.

Pero en reiteradas ocasiones, al revisar las Pruebas de Ingreso, nos damos cuenta que los estudiantes no resuelven correctamente los ejercicios pues no saben lo que le piden ni como encontrarlo que le piden, es decir, aun teniendo los conocimientos no son capaces de resolver correctamente el ejercicio.

En la sistematización de la resolución de ecuaciones también tiene gran importancia la presentación de los ejercicios que se proponen con este fin. Por ello los ejercicios seleccionados deben tener variadas formas de preguntar, se deben plantear ejercicios que tengan una, ninguna o infinitas soluciones y otros donde se pueda encontrar la respuesta sin necesidad de resolver la ecuación, e incluso reconocer el absurdo en las posibles soluciones.

Para lograr este propósito se requiere modificar la naturaleza de las tareas que se planean a los alumnos.

Por ejemplo, en el siguiente ejercicio se pretende reactivar los procedimientos de solución de ecuaciones lineales y cuadráticas y preparar las condiciones para la resolución de otros tipos de ecuaciones que conducen a ecuaciones lineales o cuadráticas.

Ejemplo 1

Sean $A = 3x + 2$ y $B = 4x^2 + 3x - 2$.

Completa los espacios en blanco:

La solución de la ecuación $A + 5 = 0$ es $x = \underline{\hspace{2cm}}$

El conjunto solución de la ecuación $B = x$ es $\underline{\hspace{2cm}}$

Si $C = A^2 - 2B$ entonces $C = \underline{\hspace{2cm}}$

El conjunto solución de la ecuación $C = 0$ es $\underline{\hspace{2cm}}$

El valor numérico de C para $x = \frac{1}{5}$ es $\underline{\hspace{2cm}}$

Resulta conveniente solicitar a los alumnos que expliquen cómo procedieron en la resolución del inciso a) y así reactivar el procedimiento de solución de las ecuaciones lineales y después hacer lo mismo con el inciso d) para el procedimiento de solución de las ecuaciones cuadráticas y así comprender que al modo de proceder anterior hay que agregar la descomposición factorial. Este es un trabajo de sistematización que debe ser completado con los otros tipos de ecuaciones. Pero este ejercicio plantea claramente lo que tiene que hacer el estudiante, el texto obliga a los alumnos a seguir la vía de resolver las ecuaciones para encontrar las soluciones de las ecuaciones planteadas y hallar el valor numérico.

Ahora observemos el ejercicio siguiente:

Ejemplo 2

Marca con una X la opción que consideres correcta.

2.1 El conjunto solución de la ecuación $\sqrt{10x - 1} - \sqrt{5x - 1} = 5$ es:

$S = \{0\}$ $S = \{29; 1\}$ $S = \{1\}$ $S = \emptyset$

2.2 Al resolver la ecuación $\frac{3}{x-5} + \frac{x^2+7}{x^2-2x-15} = \frac{-2}{x+3}$ podemos afirmar que el conjunto solución es:

$S = \{-3\}$ $S = \{-2; -3\}$ $S = \{-2\}$ $S = \{ \}$

En ejercicios como este el estudiante sin lugar a dudas puede resolver las ecuaciones y encontrar la respuesta correcta, pero resultaría muy útil si indagamos en los cuadernos de los estudiantes para ver si utilizaron otra vía de solución.

La evaluación en las ecuaciones para ver si los valores satisfacen la ecuación o si pertenecen al dominio de la ecuación, resultaría una vía muy provechosa para comprender el significado de lo encontrado y alcanzar un grado superior de generalización.

La reflexión de los estudiantes al comparar ambas vías de solución los debe conducir a la idea de que una es parte de la otra, pues se pretende sistematizar procedimientos algorítmicos integrados en un todo, procedimientos parciales que son útiles para la solución de un cierto tipo de ejercicios.

Analizamos otro ejemplo:

Ejemplo 3

Dados:

$$M(x) = \frac{6^{2x+1} - 6^{3x} \cdot 6^{x+2}}{(9^{x-3})^{x-3} - 1} \text{ y } N(n) = \frac{4^{2n} \cdot 3^{25}}{2^{23}}$$

La expresión $M(x)$ se anula para:

-1 $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ 0

Los valores inadmisibles de $M(x)$ son:

$x = 0$ $x = 3$ $x = -3$ No tiene

El valor numérico de $N(n)$ para $n = \frac{1}{2}$ es:

4 16 2 ninguna de las anteriores.

Este es un ejercicio interesante que puede ser recomendado para hacer comprender a los alumnos la necesidad del planteo de una ecuación para la resolución de determinados ejercicios. Además, sistematiza las definiciones de cero de una función y dominio de una función.

Se trata entonces del tipo de ejercicio donde en ocasiones no se dice explícitamente al estudiante lo que debe hacer, por lo que se deben tratar en clases con frecuencia.

Para que podamos decir que mediante este ejercicio se contribuye a sistematizar los conocimientos de los alumnos respecto a la resolución de ecuaciones, no basta con resolverlos bien, es necesario que se logre establecer los nexos entre los conceptos de anular e indefinir.

En este caso puede ser recomendable pedir las explicaciones a los alumnos sobre el procedimiento de solución aplicado en la revisión del ejercicio y así reactivar el procedimiento de solución de las ecuaciones resueltas.

La sistematización de las proposiciones referidas a un objeto o contenido matemático

Esta variante tiene lugar cuando se plantean ejercicios que recuerdan las proposiciones que tienen que ver con un contenido determinado, para luego precisar sus semejanzas o diferencias. Las proposiciones y las reflexiones que se realicen en torno a ellas deben garantizar las exigencias planteadas para la existencia de una sistematización de proposiciones.

Una posibilidad para sistematizar conceptos es aprovechar las relaciones lógicas entre ellos y estructurar así el sistema de conocimientos. La sistematización de los conceptos es de incalculable valor para la posterior aplicación de los mismos a la solución de los ejercicios y también para recordar de modo racional las propiedades y características que le son inherentes.

Una posibilidad para sistematizar el concepto de ecuación, el concepto de solución de una ecuación y representar el nexo entre ellos es el que se presenta a continuación.

Ejemplo 4

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa? Justifica tu respuesta.

- Existen ecuaciones de primer grado que no tienen solución.
- Hay ecuaciones lineales en una variable que tienen infinitas soluciones. en
- La solución de la ecuación $9 - \frac{2}{3}(3 - x) - 2 = \frac{3}{2}x$ es $x = 6$.
- La ecuación $\frac{7}{5}x + 3 = \frac{2}{5}(x + 5) + x$ tiene una solución.
- La ecuación $\sqrt{x + 5} + \sqrt{x^2 + 3} = 0$ no tiene solución.

4.1 Indica cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas. Justifica en cada caso.

- ___ Toda ecuación cuadrática tiene al menos dos soluciones.
- ___ La ecuación $(x + 3)^2 = 0$ tiene una solución.
- ___ Si el discriminante de una ecuación de segundo grado es menor que cero, la ecuación tiene dos soluciones reales.
- ___ Las soluciones de la ecuación $(x + 2)^2 = 2x(x + 2) - 5$ son $x_1 = 3$ y $x_2 = -3$
- ___ Al despejar la variable b en la fórmula $A = 2ab + 2ac + 2bc$ se obtiene que $b = \frac{A-2ac-a-c}{2}$
- ___ Si despejamos m en la fórmula $a^m - b = c$ encontramos que $m = \log_a(b + c)$

Esta forma de sistematizar a partir de las proposiciones permite entrenar a los alumnos en la búsqueda de los medios matemáticos que se pueden relacionar con una situación dada, lo cual es un paso previo a la determinación de aquellos medios o conocimientos matemáticos que nos permiten dar solución a un problema determinado.

Es muy frecuente en la actualidad el uso de ejercicios para determinar el valor de verdad de una proposición simple o de proposiciones compuestas, este tipo de ejercicios alcanza su éxito si el estudiante es capaz de justificar su elección correctamente; la justificación se logra si domina determinados conceptos o propiedades.

El despeje de fórmulas

En la sistematización con este tipo de ejercicios se deben elaborar o seleccionar fórmulas que les permitan modelar situaciones de la vida real ya que así traemos vivencias del que hacer económico, laboral, político, cultural, científico, ambiental, deportivo, entre otros que hacen que el estudiante se sienta parte de la sociedad en que vive, al poder resolver por medio de la matemática, estos problemas de la vida real; además de la importancia de estos ejercicios en la contribución al desarrollo de habilidades en la resolución de ecuaciones.

Veamos los ejemplos siguientes:

1- La fórmula para convertir una temperatura en grados Celsius ($^{\circ}\text{C}$) a grados Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$) es $^{\circ}\text{F} = \frac{9}{5}^{\circ}\text{C} + 32^{\circ}$.

De acuerdo con la formula anterior, escriba una relación para expresar ($^{\circ}\text{F}$) en términos de ($^{\circ}\text{C}$).

¿Cuál es la temperatura de ebullición y congelación del agua expresada en grados Fahrenheit?

2- El costo de imprimir tarjetas de cumpleaños en una empresa está dado por la fórmula $y = \frac{3000}{x} + k$, donde y es el costo en centavos por tarjetas, x es el número de tarjetas impresas y k es una constante.

Dado que $y=11$ cuando $x=500$, calcular el valor de k.

Calcular el costo por tarjeta cuando se imprimen 200.

¿Cuántas tarjetas se imprimen si el costo por tarjeta es de 7 centavos?

3- Completa los espacios en blanco de forma que se obtenga una proposición verdadera.

a) El período para una oscilación completa de un péndulo está dado por la fórmula

$T = 2\pi \sqrt{\frac{t}{g}}$ donde el período T es el tiempo en segundos, t es la longitud en metros del péndulo y g ($g \approx 10 \text{ m} / \text{s}^2$), la aceleración de la gravedad. La longitud de un péndulo que da una oscilación completa de un segundo es _____.

b) La población de una especie en extinción que se reduce a la mitad cada año se calcula con la fórmula $P(t) = M \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$, donde P(t) es la población actual y t el tiempo en años. Si al cabo de 5 años, quedan 12 ejemplares, entonces la población inicial es _____.

Al concluir la solución de estos ejercicios es necesario analizar con los alumnos las diferentes vías de solución y bajo qué condiciones existen otras vías de solución.

Por otra parte, en los ejercicios de sistematización, es muy importante variar la notación de las variables, el dominio de definición de estas y que los coeficientes de las ecuaciones no sean siempre enteros. Más importante que resolver muchas ecuaciones de un tipo, es que los educandos puedan fundamentar los pasos que realizan al determinar su solución. Además, se deben variar condiciones, de modo que conocido el conjunto solución y el dominio básico de solución se proponga una ecuación.

De igual forma se deben relacionar las ecuaciones y las funciones, en ejercicios donde las raíces de la ecuación son los ceros de la función.

Los alumnos deben poder decidir cuál de los procedimientos algorítmicos o algoritmos que conocen es el más racional para aplicarlo en un momento dado.

También es necesario que el profesor en la clase de sistematización propicie el intercambio de criterios al solucionar ecuaciones a partir de una comunicación adecuada que permita la autoevaluación del trabajo realizado y el uso de la crítica y la autocrítica, comparando los resultados obtenidos con los que deberían obtener. Se trata entonces de capacitarlos para que logren utilizar de forma consiente los procedimientos heurísticos y se apropien de estrategias para resolver los ejercicios por medio del trabajo cooperado, el intercambio de ideas y puntos de vista con sus compañeros y el profesor.

Conclusiones

En los últimos años se percibe el poco desarrollo de habilidades en la resolución de ejercicios como los aquí propuestos. La experiencia de la aplicación de estos ejercicios en el trabajo de preparación de los estudiantes de doce grado para las Pruebas de Ingreso a la Educación Superior en el Colegio Universitario de la UCP Enrique J. Varona confirmó lo eficaz que resulta la adecuada sistematización de estos contenidos. Se reafirma que la selección cuidadosa de las actividades encaminadas a la sistematización, la formulación correcta de los ejercicios y el trabajo con estos en la clase de sistematización logran su propósito. El objetivo tiene que ser llegar a la totalidad de los alumnos y transformar las formas rígidas y mecánicas del pensamiento, que tanto han afectado los resultados de esta sistematización,

reflejados en la calidad de las notas en las Pruebas de Ingreso. Se trata de aplicar con un minucioso cuidado el conocimiento de los expertos en la Metodología de la Enseñanza de la Matemática que nos han dejado una científica y sólida literatura para la consulta. Los resultados alcanzados en esta experiencia resultan de gran importancia para fundamentar esta teoría.

Bibliografía

- Ballester Pedroso, S. y otros. (1992). *Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Tomo I*. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.
- Ballester Pedroso, S. y otros. (1992). *La sistematización de los conocimientos matemáticos en el noveno y duodécimo grado de la escuela cubana*.
- Ballester, S. (2002). *Transcurso de las líneas directrices en los programas de Matemática y la planificación de la enseñanza*. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.
- Castellanos. B. (2002). *El enfoque tradicional en la investigación educativa. Material en soporte magnético*. La Habana, Cuba: ISPEJV.
- Castellanos. B, Lliviana. M y otros. (2001). *Aprender y enseñar en la escuela: Una concepción Desarrolladora (Documento en soporte magnético)* La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.
- Colectivo de autores del MINED,. (2000). *Manual de ejercicios Matemática para la educación Media Superior (Primera Parte)* . La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.
- González, Z. C y otros. (1991). *Matemática duodécimo grado parte 2. Sistematización*. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación. Cuba.
- Jungk, W.(1985) Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática 2. 1ra parte, La Habana, Cuba: Pueblo y Educación
- Puig, S. (2004). *La medición de la eficiencia del aprendizaje de los alumnos (Documento en soporte magnético)*. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Contribución de los autores:

Autor único

Declaración de conflictos de interés

Los autores declaramos que este manuscrito es original, no contiene elementos clasificados ni restringidos para su divulgación ni para la institución en la que se realizó y no han sido publicados con anterioridad, ni están siendo sometidos a la valoración de otra editorial.

Los autores somos responsables del contenido recogido en el artículo y en él no existen plagios, conflictos de interés ni éticos.