Las construcciones geométricas en el entrenamiento a concursos y olimpiadas de matemática

Geometrical constructions in the training for Mathematics contexts and Olympics

Lic. Ernesto Alejandro López Cadalso. Profesor Instructor. Universidad de Ciencias Pedagógica Enrique José Varona, Facultad de Ciencias Naturales y Exactas, Departamento de Matemática-Física, La Habana, Cuba.

Correo electrónico: ernestoalejandro@ucpejv.edu.cu

Orcid: https://orcid.org/0000-0001-8015-3506

Dr.C. Yasser Martin Guillén. Profesor Asistente. Universidad de Ciencias Pedagógica Enrique José Varona, Facultad de Ciencias Naturales y Exactas, Departamento de Matemática-Física, La Habana, Cuba.

Correo electrónico: yassermg@ucpejv.edu.cu

Orcid: https://orcid.org/0000-0001-5456-2568

Recibido: enero de 2020 **Aprobado: abril de 2020**

RESUMEN

El trabajo que se presenta tiene como objetivo demostrar la importancia de las construcciones geométricas en el proceso de resolución de problemas para los estudiantes de concursos. Para ello, se realizan las construcciones geométricas necesarias para la solución de tres problemas seleccionados de concursos y olimpiadas acompañadas de las soluciones de los ejercicios, lo cual puede ser útil para un profesor que desea entrenar a sus estudiantes en este tipo de actividad.

Palabaras clave: Construcciones geométricas, resolución de problemas, concursos y olimpiadas

ABSTRACT

The work presented aims to demostrate the importance of geometric constructions in the problem-solving process for competitions and Olympics. For this, the geometric constructions necessary for the solution of three selected problems of competitions and Olympics accompanied by the solution of the exercises are carried out, which can be useful for a teacher who wishes to train his studens in this type of activity.

Keywords: geometric constructions, the problem-solving, competitions and Olympics

Introducción

En el proceso de resolución de un problema matemático el hombre se apoya en principios, reglas y estrategias heurísticas. Si la solución del problema requiere de conocimientos geométricos, entonces es importante, en múltiples ocasiones, construir una figura geométrica con las condiciones dadas en el problema. Por ello, las construcciones geométricas resultan de especial importancia en el contenido de la matemática y aparece desde las primeras edades en los diferentes currículos del mundo.

Álvarez, M. Almeida, B. y Villegas, E. (2014) evidencian que “En todos los niveles de educación los alumnos deben aprender a resolver problemas matemáticos en sentido amplio, en tanto se sitúan ante situaciones problemáticas que exigen que movilicen sus recursos personológicos hacia el logro de un objetivo, para el cual no poseen de antemano una vía de solución conocida."[1] Y proponen a los profesores que "Debe enseñarse a los niños desde los primeros grados a utilizar estrategias diversas en la resolución de problemas, entiéndase recursos heurísticos y metacognitivos. La utilización de materiales manipulativos, la realización de dibujos, el esbozo de figuras, la construcción de modelos lineales, tablas de doble entrada o diagramas, la conveniencia de un tanteo inteligente, de aprovechar las utilidades de calculadoras o medios informáticos, de buscar relaciones, establecer analogías, de analizar casos particulares, de medir y comparar, de monitorear lo que se hace por diversas vías, son algunos de los recursos que deben aprender progresivamente."(2)

Diversos autores que han abordado la resolución de problemas y el desarrollo del pensamiento geométrico-espacial confirman la afirmación anterior. Carrasco, A. (2004) desde la heúristica para la resolución de problemas propone la aplicación de los principios, reglas y estrategias heurísticas que evidencian la importancia de las construcciones geométricas. Campistrous, L. y Rizo, C. (2007) aplican estos procedimientos heurísticos a la resolución de problemas, vinculados a la tecnología. Crespo, E. (2007) en esta última dirección expuso que "la tendencia internacional es que muchos problemas que se resolvían tradicionalmente a base de álgebra se pueden ahora resolver de forma más efectiva y general usando la representación geométrica y las técnicas de gráfica por ordenador."(3)

Ron, J. (2007) realiza una sistematización de los principales autores que en Cuba y en el mundo han abordado el tema de resolución de problemas para proponer una estrategia didáctica en este sentido. Polya, G. (1944), Schöenfeld, A. H. (1985), Ballester, S. (1992), Torres, P. (1993), Campistrous, L. y Rizo, C. (1996), Llivina, M. (1998), Rebollar, A. (2000), Ferrer, M. (2000), González, D. (2001), Alonso I. y Martínez, N. Sigarreta, J. M. Palacio, J. y Cruz, M. (2002), Fonte, A. (2003), Capote, M. (2003), Suárez, S. (2004) y Jiménez, M. (2007) se encuentran en esta sistematización y coinciden en la elaboración de un modelo como parte de la solución de un problema. Las construcciones geométricas, en los problemas geométricos, son parte integrante del modelo que los autores anteriores plantean. Este autor define una serie de términos que se asume en esta investigación "Se asume por solución de un problema todo objeto que satisfaga la exigencia planteada; por vía de solución, todo conjunto de proposiciones verdaderas que a través de inferencias enlaza el planteamiento inicial (elementos dados, datos) con la exigencia (incógnita, elementos buscados), y por resolución de problemas el proceso mediante el cual se construye la vía de solución o se contradice la existencia de una vía."(4)

Coro, F. (2019) en su obra relativa al pensamiento geométrico espacial expone la relación de las construcciones geométricas en los procesos mentales cuando expone que "En la matemática, la comprensión y operación de conceptos exige un alto grado de abstracción, de ahí resulta el importante rol que desempeñan procesos como la representación y la visualización. La visualización para muchos investigadores se manifiesta tanto interna como externamente y está estrechamente relacionada con la formación y obtención de imágenes, también la asocian con la construcción y la manipulación de representaciones mentales de objetos de dos y tres dimensiones y la percepción de los objetos desde diferentes perspectivas"(5).

La experiencia de los autores de esta obra relativa a las construcciones geométricas en el proceso de resolución de problemas se concreta en el entrenamiento a los estudiantes de la enseñanza media para los concursos de matemática. Las construcciones geométricas, en los problemas de concurso resultan muy complejas y definitorias por la complejidad de las vías de solución. El profesor entrenador tiene que proponer ejercicios para que los estudiantes realicen construcciones geométricas y mostrarles a los estudiantes la importancia de realizarlas para llegar a la solución.

Por ello, este trabajo tiene como objetivo **demostrar la importancia de las construcciones geométricas en el proceso de resolución de problemas para los estudiantes de concursos**.

Para lo cual proponemos las construcciones geométricas a realizar en tres problemas extraídos de las Olimpiadas Iraníes de Geometría junto a algunas recomendaciones metodológicas a realizar.

Desarrollo

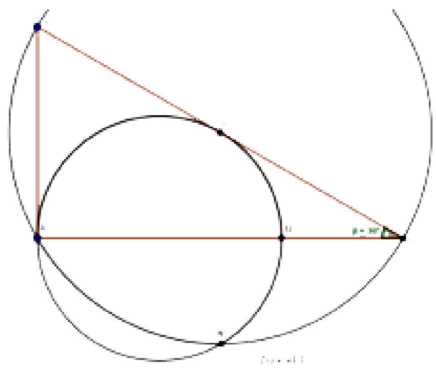
El primer problema es el número 1 del nivel elemental de IGO 2014, elaborado por Etesami Fard, M: "En un triángulo rectángulo ABC se tiene que: $\angle A = 90^0$ y $\angle C = 30^0$. Sea w la circunferencia que pasa por A y es tangente al lado BC en su punto medio. Asuma que w interseca al lado AC y a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC en N y M respectivamente. Prueba que $MN \perp BC$."

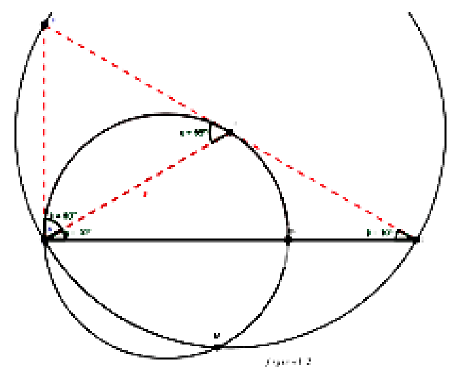
En este tipo de problemas es conveniente realizar varios esbozos de la figura hasta tener algunas ideas acerca de los hechos geométricos que pudieran tener lugar y que pueden sugerir ideas de cómo enfrentar el problema. En primer lugar, se debe reflexionar acerca del orden más adecuado a la hora de realizar la construcción de la figura. Consideramos aconsejable, construir primero la circunferencia w, para luego trazar la línea tangente BC, después la circunferencia de centro K y diámetro BC, y finalmente el triángulo rectángulo ABC teniendo en cuenta que A es uno de los puntos de intersección de las dos circunferencias. $(figura\ 1.1)$ También es muy útil el empleo de la estrategia trabajo hacia atrás, es decir; considerar que ya sabemos que $MN \perp BC$ y analizar todas implicaciones que esto trae consigo. De estas reflexiones se pueden derivar conclusiones tales como: el menor de los ángulos formado por las rectas MN y AC tiene que tener una amplitud de 60^0; la recta MN tiene que contener a la altura relativa al lado BC en el triángulo KNC, o a la altura relativa al mismo lado en el triángulo KMC; si prolongamos MN hasta que interseque nuevamente a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, el diámetro BC tiene que ser mediatriz de la nueva cuerda formada. En la presente solución probaremos la primera de las conclusiones anteriormente citadas.

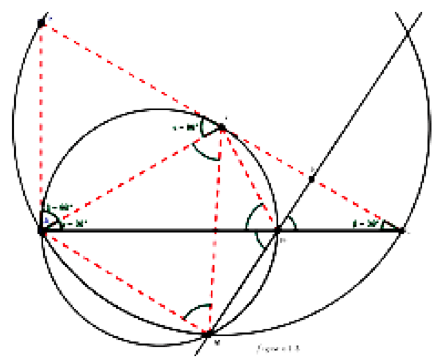
El dominio de los conceptos relacionados en el problema sugiere la idea de trazar los segmentos:

AK, para obtener los triángulos isósceles KAC y BAK, de donde se obtiene que $\angle KAC = \angle C = 30^0$ y por ende, $\angle BAK = \angle A - \angle KAC = 60^0$ que a su vez permite concluir que: triángulo BAK es equilátero.$(figura\ 1.2)$

KN, KM y AM, para construir los ángulos inscritos $\angle ANK$, $\angle AMK$, $\angle AKM$ y $\angle MKN$; y los ángulos seminscritos $\angle AKB$ y $\angle NKC$. De lo anterior se obtienen los siguientes resultados: $\angle ANK = \angle AMK = \angle AKB = 60^0$, lo cual implica que el triángulo AMK es equilátero ($AK = KM$ por ser radios de w) y por consiguiente: $\angle PNC = \angle ANM = \angle AKM = 60^0$ siendo P el punto de intersección de las rectas MN y BC. De este último hallazgo se deduce que el triángulo CPN es rectángulo en P y por tanto $MN \perp BC$. $(figura\ 1.3)$







El segundo problema, propuesto por Vakili, D, es el problema 2 de IGO 2015:

En un triángulo acutángulo ABC el segmento BH es la altura desde el vértice B. Los puntos D y E son los puntos medios de los lados AB y AC repsectivamente. Suponga que F es la reflexión de H con respecto a la recta ED. Pruebe que la recta BF pasa a través del circuncentro O del triángulo ABC.

Probar que la recta BF pasa por el punto O es equivalente a probar que los puntos B, F y O son colineales. Los problemas que involucran colinealidad de puntos son muy variados al igual que las diferentes vías para enfrentarlos, entre las cuales resulta de vital importancia el trabajo con ángulos. Al respecto vale la pena tener en cuenta tres ideas:

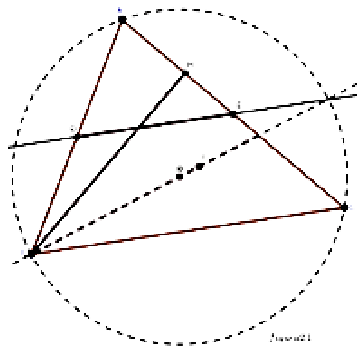
- si A, B y C son puntos alineados y D, B y E son tres puntos no colineales con los anteriores; D, B y E serán colineales si y solo si $\angle ABD = \angle CBE$.
- sean los puntos A, B, C y D tales que A, B y D; B, C y D no son colineales. Los puntos A, B y C serán colineales si y solo si: $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = 180^0$.
- sean los puntos A, B, C y D no todos colineales; los puntos B, C y D serán colineales si y solo si $\angle ABC = \angle ABD$.

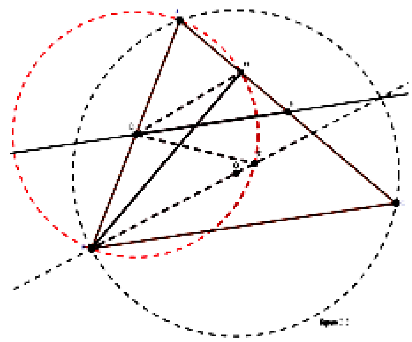
Un antecedente importante de este problema lo constituye el siguiente resultado: si O es el circuncentro del triángulo ABC, entonces $\angle AOB = 2\angle C$ y por ende $\angle OBA = 90^0 - \angle C$.

En problemas como este, hay que tener en cuenta que la figura que se represente tiene que ser lo más general posible: en el caso que nos ocupa, un triángulo escaleno y acutángulo. $(figura\ 2.1)$

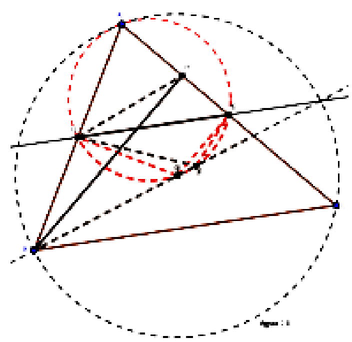
Analicemos dos soluciones:

La primera solución consiste en probar que: $\angle FBA = 90^0 - \angle C$. El hecho de que el triángulo BHA es rectángulo en H y que D es el punto medio de la hipotenusa, unido a las propiedades de la reflexión permiten concluir que: $AD = DH = DF = DB$ lo cual conduce a que A, H, F y B pertenecen a la circunferencia con centro en D y diámetro AB. Lo cual sugiere construir dicha circunferencia. $(figura\ 2.2)$ Las propiedades de los ángulos en la circunferencia permite concluir que $\angle FBA + \angle FHA = 180^0 = \angle FHA + \angle FHE$, por lo que $\angle FBA = \angle FHE = 90^0 - \angle DEH = 90^0 - \angle C$, ya que DE es la paralela media relativa al lado BC en el triángulo ABC.





La segunda solución consiste en probar que: $\angle C = \angle DOF$. Las propiedades del circuncentro sugieren trazar los segmentos de mediatrices DO y EO, de donde se puede inferir que los puntos A, D, O y F pertenecen a la circunferencia de diámetro AO. Al trazar esta circunferencia todo parece indicar que también pasa por F. Las propiedades del triángulo rectángulo BHA permiten concluir que: $\angle A = \angle DHA = 180^0 - \angle DHE = 180^0 - \angle DFE$, debido a la simetría de la figura. Esto prueba que F pertenece a la circunferencia de diámetro AO. Al igual que en la solución anterior $\angle C = \angle DEA = \angle DEF = \angle DOF$.



El tercer problema, elaborado por Sajidi, F, es el problema 2 de nivel avanzado de IGO 2018:

Sea ABC un triángulo acutángulo tal que $\angle A = 45^0$ y de circuncentro y ortocentro O y H respectivamente. El punto D es el pie de la altura desde B. El punto X es el punto medio del arco AH del circuncírculo del triángulo ADH que contiene a D. Pruebe que $DX = DO$.

Luego de realizar los esbozos necesarios, se pueden inferir los resultados siguientes: el triángulo HXA es isósceles y rectángulo en X por lo que $\angle ADX = \angle AHX = 45^0$ y además $\angle COB = 2\angle A = 90^0$. ($figura$ 3.1) Esto último implica que los puntos O y D pertenecen a una circunferencia de diámetro BC. Por ende, $\angle ODA = 180^0 - \angle CDO = \angle OBC = 45^0$. Por tanto AD es una bisectriz del $\angle ODX$, y $\angle ODX = 90^0$. ($figura$ 3.2) Además, si trazamos la altura desde C el triángulo que esta forma con los lados CA y AB sería isósceles y rectángulo, por lo que $\angle ACH = 45^0 = \frac{1}{2}\angle AXH$. Esto, unido al hecho de que $AX = XH$, implica que X es el circuncentro del triángulo ACH, y por tanto: $AX = XH = XC$. Luego, OX es mediatriz del lado AC, por lo que $OX \perp AD$. ($figura$ 3.3) Finalmente, AD es bisectriz del $\angle ODX$ y $AD \perp OX$, lo cual se traduce en que el triángulo ODX es isósceles y $OD = DX$.

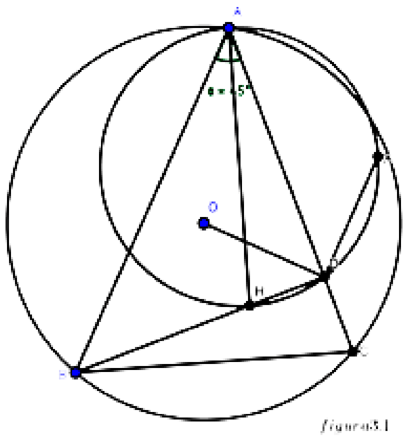


figura3.1

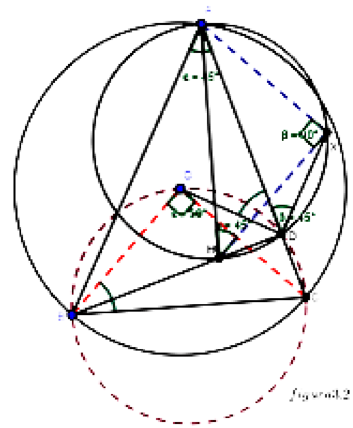


figura3.2

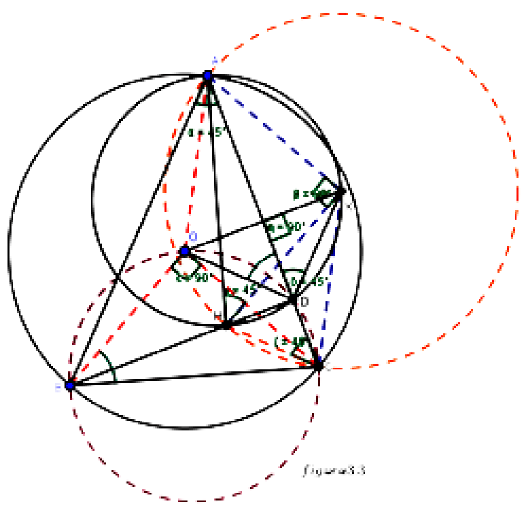


figura3.3

Conclusiones

La resolución de problemas constituye el eje central de la asignatura Matemática. Por ello, resulta importante el conocimiento de las herramientas heurísticas que posibilitan la solución de un problema. En este sentido, este trabajo ha estado dirigido a la importancia de las construcciones geométricas en el proceso de resolución de problemas y se muestran tres construcciones a realizar en tres problemas de las olimpiadas iraníes de geometría, lo cual constituye una valiosa herramienta para un profesor que entrene estudiantes de concursos y olimpiadas de matemáticas.

Referencias bibliográficas

1. Álvarez, M. Almeida, B. y Villegas, E. El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Documentos metodológicos. Pueblo y Educación. La Habana. 2014.
2. Álvarez, M. Almeida, B. y Villegas, E. El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Documentos metodológicos. Pueblo y Educación. La Habana. 2014.
3. Crespo Hurtado, Erick T. Modelo didáctico sustentado en la heurísticapara el PEA de la Matemática asistida por computador (tesis de doctorado). Universidad Félix Vaera. Santa Clara. 2007.
4. Ron, José. Una estrategia didáctica para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas en las clases de Matemática en la Educación Secundaria Básica. (tesis de doctorado). Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona. 2007.
5. Coro Rodríguez, Francisco. Estrategia didáctica para el desarrollo del pensamiento geométrico-espacial en la formación del profesor de Matemática. (tesis de doctorado). Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona. La Habana. 2019.

Bibliografía

Álvarez, M. Almeida, B. y Villegas, E. (2014). El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Documentos metodológicos. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Campistrous, Luis y Rizo, Celia. (2007). Aprende a resolver problemas aritméticos. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Carrasco, Alexis. Heurística. (2004). Aprender matemática resolviendo problemas. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Crespo Hurtado, Erick T. (2007). Modelo didáctico sustentado en la heurísticapara el PEA de la Matemática asistida por computador (tesis de doctorado). Universidad Félix Valera, Santa Clara, Cuba.

Comarnicki, Nestor Oscar. (2013). 100 construcciones geométricascon herramientas manuales e informática. Buenos Aires, Argentina: Editorial Dunken.

Coro Rodríguez, Francisco. (2019). Estrategia didáctica para el desarrollo del pensamiento geométrico-espacial en la formación del profesor de Matemática. (tesis de doctorado). Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona, La Habana, Cuba.

Iranian Geometry Olympiad Secretariat. (2015). 2nd Iranian Geometry Olympiad Contest problems with solutions. Teheran, Irán.

Iranian Geometry Olympiad Secretariat. (2016). 3rd Iranian Geometry Olympiad Contest problems with solutions. Teheran, Irán.

Iranian Geometry Olympiad Secretariat. (2017). 4th Iranian Geometry Olympiad Contest problems with solutions. Teheran, Irán.

Iranian Geometry Olympiad Secretariat. (2019). 6th Iranian Geometry Olympiad Contest problems with solutions. Teheran, Irán.

Iranian Geometry Olympiad Secretariat. (2014). Iran´s Geometry Problems with solutions. Teheran, Irán.

Iranian Geometry Olympiad Secretariat. (2018). The Fifth Iranian Geometry Olympiad Contest problems with solutions. Teheran, Irán.

Kostovski, A. N. (1984). Construcciones geométricas mediante un compás. Moscú, Rusia: Mir.

Posamentier, Alfred. (1982). Math motivator: investigations in geometry. California, Estados Unidos de América: Addison-Wesley Publishing.

Posamentier, Alfred. Salkind, Charles. (1996). Challenging problems in geometry. New York, Estados Unidos de América: Dover Publications.

Ron, José. (2007). Una estrategia didáctica para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas en las clases de Matemática en la Educación Secundaria Básica. (tesis de doctorado). Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona, La Habana, Cuba.

Smogorzhevski, A.S. (1988). La regla en construcciones geométricas. Moscú, Rusia: Mir