

## Aprender matemática a partir de un problema. Una metodología

Learn mathematic solving problems. A methodology

**Dr. C Alexis Carrasco Trujillo**

<[alexisact@ucpejv.edu.cu](mailto:alexisact@ucpejv.edu.cu)> <https://orcid.org/0000-0003-3946-7233>

Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona, La Habana, Cuba.

---

### RESUMEN

El objetivo del artículo es proponer una metodología para la resolución de problemas en la enseñanza-aprendizaje de la matemática. Se argumenta la enseñanza problémica como una vía para su tratamiento. La propuesta favorece en los estudiantes la adquisición de contenidos matemáticos, el desarrollo del pensamiento lógico y los enseña a utilizar estrategias cognitivas y metacognitivas resolviendo problemas.

**Palabras clave:** resolución de problemas; estrategia cognitiva y metacognitiva; heurística.

### ABSTRACT

The objective of the article is to propose a methodology for the resolution of problems in the mathematics teaching-learning. One argues the teaching problematic like a road for their treatment. The proposal favors in the students the acquisition of mathematical contents, the development of the logical thought and the emblem to use strategies cognitive and metacognitive solving problems.

**Keywords:** problem solving; cognitive and metacognitive strategy; heuristic.



International, que permite su uso, distribución y reproducción, siempre que sea citado de la manera adecuada y sin fines comerciales.

## INTRODUCCIÓN

En el año 1980 el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de EE.UU. (NCTM) difundió ocho recomendaciones acerca de la enseñanza de las matemáticas, que resumen los objetivos y prioridades que este colectivo tenía en ese momento. Hasta nuestros días perdura la primera de ellas donde se establece que la resolución de problemas debe ser el objetivo primordial en la enseñanza de las matemáticas<sup>1</sup>.

Es oportuno destacar el concepto “problema” según los puntos de vistas más reconocidos por la comunidad científica dedicada a la resolución de problemas.

Citemos al Dr. Luis Campistrous<sup>2</sup> en su obra *Aprender a resolver problemas aritméticos* donde asume como concepto problema a toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo, evidente en la figura 1.

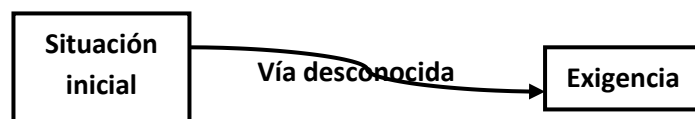


Figura 1. Muestra esquemáticamente la definición del concepto problema

La vía para pasar de la situación inicial o planteamiento inicial a la nueva situación exigida, tiene que ser desconocida; cuando es conocida deja de ser un problema.

Veamos los criterios de destacados matemáticos que han reconocido la resolución de problemas como un componente importante en el estudio del conocimiento matemático. Campistrous<sup>2</sup> destaca que la resolución de problemas es “una de las conductas más inteligente del hombre y que más utilidad práctica tiene, ya que la vida misma obliga a resolver problemas continuamente. Halmos<sup>3</sup> sugirió que resolver problemas es el corazón de la matemáticas, Kleiner<sup>4</sup> enfatizó que el desarrollo de conceptos y teorías matemáticas se originan a partir de un esfuerzo por resolver un determinado problema.

En el análisis de “la historia de la matemática” se puede constatar que los avances matemáticos casi siempre se originan en un esfuerzo por resolver un problema específico. Es de destacar que en la didáctica de la matemática, la resolución de problemas está representada en todas las actividades de los estudiantes, ya sea como trabajo

independiente, en los ejemplos que se resuelven en las clases y en los exámenes como forma de evaluación de los conocimientos adquiridos.

La resolución de problemas es una actividad innegable en el aprendizaje de las matemáticas, para ello, los profesores deben emplear métodos de enseñanza que estimulen constantemente la actividad cognoscitiva del estudiante en la búsqueda de nuevos conocimientos o motivarlos para lograr la investigación y profundización en elementos del contenido abordado en las clases y no fijados hasta la correspondiente clase práctica o seminario de resolución de problemas.

En las clases de matemática, se trata constantemente de utilizar las actividades de resolución de problemas en la búsqueda de la independencia cognoscitiva del estudiante, del desarrollo progresivo del pensamiento lógico y elevar sus capacidades creadoras con fantasía. Es por ello que en una clase de matemática hay que presentar y tratar los nuevos contenidos a partir del planteamiento y solución de problemas prácticos, vinculados con la vida y no solo desde la propia lógica de la ciencia. Con este fin, se hace necesario lograr que los estudiantes trabajen con creciente independencia y creatividad, aprendan a razonar lógicamente y a buscar de manera heurística soluciones a problemas.

Es práctica común en el proceso enseñanza-aprendizaje en las clases de Matemática, presentar a los estudiantes los contenidos programados por unidades temáticas, hacer el tratamiento metodológico de teoremas, conceptos y/o procedimientos de trabajo y posteriormente resolver algunos problema donde se ponga en práctica lo aprendido. Generalmente, el profesor desarrolla la clase sobre un tema concreto, orienta resolver un ejercicio o problema en correspondencia con el tema tratado y finalmente evalúa si has entendido lo impartido en la clase. Es decir, se ha aprendido matemática y se resuelven problemas en relación con lo aprendido, es evidente, resolver problema se toma como último fin en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

¿Qué ocurriría si por el contrario, se tomara el problema como un punto de partida del aprendizaje y la construcción o consolidación del conocimiento matemático ocurriera durante su resolución? De esta manera, el profesor y los alumnos desarrollarían el trabajo en conjuntos y el aprendizaje se llevaría a cabo de forma cooperada en la clase. En otras palabras, resolver problema contribuiría a la enseñanza-aprendizaje de la matemática. Con este propósito, siguiendo el método de la investigación acción el cual se apoya en experimentos participativos con grupos de alumnos y profesores, en el ISPTEC “Instituto

Superior Politécnico de Tecnología y Ciencias” de la República Popular de Angola se realizó una experiencia pedagógica con estudiantes de nuevo ingreso en enero del 2015 que comprendió 21 estudiantes y se prepararon 5 profesores con una metodología basada en el sistema de acciones que se plantean en la obra de Valle Lima<sup>5</sup> por considerar que el método está asociado siempre a un resultado y por tanto todo método presupone:

- La presencia de objetivos
- Un sistema de acciones
- La utilización de medios
- La existencia de un objeto
- Alcanzar un resultado.

En esta experiencia se utilizaron métodos empíricos para evaluar el estado de la capacidad de resolver problemas y comprobar el efecto de la introducción de las nuevas ideas que se tienen acerca de la enseñanza-aprendizaje de la matemática resolviendo problemas que se presentan en este trabajo.

Se enfatizó en la preparación de los docentes, que en el proceso de aprender matemáticas, se debe poner especial atención al tipo de problemas o situaciones problemáticas que se planifiquen resolver que motiven a estudiantes a continuar aprendiendo y profundizando en el saber matemático, por ello, debe ser un proceso de interacción del estudiante con problemas no rutinarios donde se fomente la investigación y la discusión de las estrategias de resolución, a fin de contribuir al desarrollo de una disposición hacia el estudio de las matemáticas.

Frecuentemente la resolución de ejercicios o problemas mediante algoritmos o mediante la utilización de procedimientos heurísticos ya utilizados, que permitan encontrar la idea de solución y plantearse el plan de solución para resolverlo.

Con la propuesta que se hace, el problema es un punto de partida del aprendizaje y la construcción del conocimiento matemático ocurre durante su resolución. Se busca que el alumno deje de ser “objeto de enseñanza” y pase a ser “sujeto” de su aprendizaje. De esta manera, el profesor y los alumnos desarrollan el trabajo en conjunto y el aprendizaje se lleva a cabo de forma colaborativa en la clase, profundizando en la aplicación de aquellos contenidos matemáticos que constituyen conceptos y procedimientos importantes, o sea, se está “aprendiendo matemática resolviendo problemas”.

En esta metodología, se les propone a los estudiantes resolver un problema antes de que se le hayan presentado los contenidos ya tratados en la clase de matemática que se necesitan en la actividad para resolverlo, el aseguramiento del nivel de partida formará parte del procedimiento de resolución del problema bajo la orientación del maestro, el cual reactivará de forma oportuna los contenidos necesarios para resolver el problema. De esta manera, se abre paso a la independencia cognoscitiva de los estudiantes y en el debate necesario en toda actividad de resolución de problemas, se propicia la profundización como forma de fijación de los conocimientos.

Es por ello que se recomienda para las clases de resolución de problemas seguir los siguientes pasos que constituyen una metodología de trabajo para el profesor:

- 1.- Organizar la clase práctica o formar grupos (si se trata de seminario como forma de organización de la actividad) y distribuir los problemas a resolver y realizar una adecuada motivación que estimule el deseo de resolver el problema;
- 2.- Centrar las acciones en la búsqueda y aplicación del modelo matemático que ayude a comprender mejor el problema o que ayude a encontrar los medios y la vía a seguir en su solución. El modelo apropiado sería aquel que nos permita representar la información que nos brinda el problema en su formulación (esquematizar o representar la información).

Es oportuno destacar que para la planificación y dirección de resolución de problemas se utilizan los llamados programas heurísticos, destacándose el elaborado por G. Polya<sup>7</sup>, conocido como PROGRAMA HEURÍSTICO GENERAL, por constituir un instrumento universal de dirección para el maestro, y una base de orientación para el estudiante en el trabajo con problemas, sus fases son:

- I.- Orientación hacia el problema,
  - II.- Trabajo en el problema,
  - III.- Solución del problema,
  - IV.-Evaluación de la solución y la vía
- 3.- Utilizar estrategias cognitivas: métodos heurísticos tales como descomponer el problema en simples casos, buscar relaciones entre los datos, hacer énfasis en las palabras claves y en el diseño de una figura de análisis, invertir el problema, ayudar con problemas secundarios ya resueltos que sean de conocimiento de los alumnos;
  - 4.- Utilizar estrategias metacognitivas: ir monitoreando y evaluando permanentemente los pasos dados en el proceso de resolver el problema;

5.- Trabajar en pizarra los resultados-respuestas obtenidas, realizar el análisis fomentando la discusión en la búsqueda de consenso en la veracidad del resultado obtenido;

6.- Formalizar el contenido: los principales contenidos que permitieron resolver el problema, las definiciones, los hechos, los procedimientos usados en el dominio matemático y la estrategia asumida.

Se debe destacar que encontrar la solución de un problema matemático no es el fin de la actividad matemática, sino el punto inicial para encontrar otras soluciones, extensiones y generalizaciones de ese problema. La ganancia metodológica está e que los estudiantes, luego de haber resuelto el problema, tienen la evidencia de la aplicación de la matemática, sin dudas, comprenden la importancia de su aprendizaje. Se ha aprendido matemática resolviendo problema.

El soporte didáctico de esta propuesta está dado por las consideraciones establecidas por Carrasco Trujillo<sup>6</sup>. El autor destaca cuál debe ser el proceder del profesor en el proceso de resolución de problemas en correspondencia con el programa heurístico general. En la Tabla 1, se resumen cuáles deben ser las acciones del profesor, cuáles deben ser las intenciones del profesor, así como en qué fase del programa heurístico se deben corresponder.

Tabla 1. Proceder del profesor en el proceso de resolución de problemas		
ACCIONES DEL PROFESOR		INTENCIONES DEL PROFESOR
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pedir a un alumno que lea el enunciado del problema en voz alta.</li> <li>• Discutir palabras o frases que puedan despertar dudas.</li> <li>• Pedir a un alumno hacer referencia a la(s) palabra(s) clave del problema</li> <li>• Pedir a un alumno que repita el enunciado con sus propias palabras.</li> <li>• Discutir con el grupo la comprensión del problema.</li> <li>• Discutir con el grupo posible estrategia de resolución.</li> </ul>	Orientación hacia el Problema	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mostrar la importancia de la lectura cuidadosa del problema y centrar la atención en ciertas palabras que tienen significado especial</li> <li>• Realzar la importancia que tiene la comprensión del enunciado del problema</li> <li>• Centrar la atención en datos importantes y aclarar partes del problema.</li> <li>• Hacer surgir ideas sobre posibles maneras de resolver el problema.</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Observar el trabajo de los alumnos y dar impulsos cuando se requiera. Llamar la atención sobre problemas semejantes ya resueltos.</li> <li>• Discutir la búsqueda de la idea de la solución y el establecimiento del Plan de Solución.</li> </ul>	Trabajo en el Problema	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificar los aspectos deficientes de los alumnos.</li> <li>• Ayudar a los alumnos a sobrepasar el impasse.</li> <li>• Destacar el uso de diferentes heurísticas en el proceso.</li> </ul>

<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dialogar sobre la realización del Plan de Solución.</li> <li>• Verificar la adecuada presentación de la respuesta del problema.</li> </ul>	<b>Solución del Problema</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ayudar a los alumnos en la ejecución del Plan de Solución.</li> <li>• Proporcionar que se confronten las respuestas obtenidas.</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pedir a los alumnos que expliquen y discutan las estrategias de resolución que aplicaron.</li> <li>• Pedir a los alumnos que relacionen el problema con otros ya resueltos y ampliar el problema con otros incisos de ser necesario.</li> </ul>	<b>Evaluación de la Solución y de la vía</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Comprobar la solución</li> <li>• Identificar las diferentes estrategias que permitieron resolver el problema y comprobar los pasos dados.</li> <li>• Analizar la adquisición de conocimientos y las habilidades desarrolladas para enfrentar otros problemas.</li> </ul>

Un ejemplo representativo se muestra a través del siguiente problema:

El radio de la base de un cilindro circular recto se aumenta en un 20%, mientras que la altura disminuye en un 12%. Determinar en qué porcentaje varía el volumen, especificando si este aumenta o disminuye.

Profesor: Como medio auxiliar heurístico representen una figura de análisis que favorezca una mejor comprensión del problema planteado.

Separen los datos dados y lo buscado.

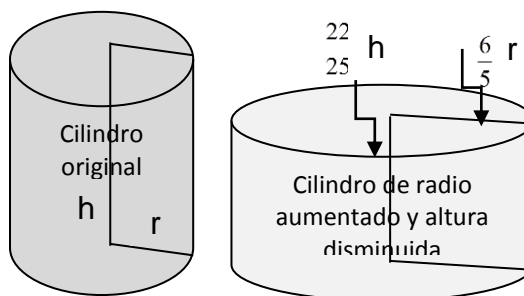
Datos

$r$  – radio de la base

$h$  – altura del cilindro original

$V$  – volumen del cilindro original

$V_c$  – volumen después del cambio



Se trabajarán las fases del programa heurístico general:

1.- Orientación hacia el problema:

Búsqueda de una adecuada interpretación del problema a través de la lectura del enunciado.

Discutir palabras o frases que puedan despertar dudas.

Destacar las palabras que tienen significado especial

2.- Trabajo en el problema:

En esta fase se debe elaborar el plan de solución.

La dirección de los impulsos del profesor deben estar dirigidos hacia lo que representan las palabras claves y la transformación de un número porcentual en un número real:

Volumen del cilindro  $V = \pi r^2 h$

Los impulsos y las preguntas heurísticas del profesor estarán en la dirección de convertir porcentos en fracciones: 12% representa  $\frac{3}{25}$  y 20% representa  $\frac{1}{5}$

Análisis del texto para extraer las relaciones y dependencias entre las magnitudes.

Modificación en el radio por el aumento en un 20% implica  $(r + \frac{1}{5}r) = \frac{6}{5}r$

Modificación en la altura por la disminución en un 12% implica  $(h - \frac{3}{25}h) = \frac{22}{25}h$

Volumen después del aumento del radio y disminución de la altura

$$V_c = \pi \left(\frac{6}{5}\right)^2 r^2 \left(\frac{22}{25}\right) h.$$

Esta sucesión de impulsos e indicaciones lógicas han conducidos al establecimiento del Plan de Solución para determinar el aumento o disminución del volumen del cilindro  $\Delta V_c$

3- Solución del problema:

Fase de realización del plan de solución

Luego de haber llegado a estos resultados, el profesor incentivará la determinación del

incremento del volumen:  $\Delta V_c = V_c - V = \frac{792}{625} \pi r^2 h - \pi r^2 h = \frac{167}{625} \pi r^2 h$

Profesor: ¿Según el resultado obtenido qué se puede inferir en relación a lo buscado?

Respuesta esperada: El incremento positivo, es un indicador de que el volumen aumenta.

Profesor: ¿Cómo determinar el porcentaje solicitado?

Respuesta esperada: El porciento que aumenta se calcula aplicando la regla para el Tanto por Ciento

$$\frac{\frac{167}{625} \pi r^2 h}{\pi r^2 h} \cdot 100 = 26,72 \%$$

Respuesta: El cilindro aumenta su volumen en un 26, 72 %

4- Evaluación de la solución y la vía

Se evaluará retrospectivamente el resultado obtenido y se formalizará el

contenido matemático aplicado que facilitó resolver el problema: Concepto de volumen de un cuerpo, cálculo del tanto por ciento y como transformar un número porcentual en un número real, planteo de ecuaciones, los conceptos de la lógica en la traducción del lenguaje común al algebraico y la sustitución en fórmulas.



Es evidente, con esta consolidación y profundización de los contenidos aplicados, se ha aprendido matemática resolviendo problema. Como aporte se ha contribuido a la enseñanza-aprendizaje de la matemática.

Acertadas las ideas de Polya<sup>7</sup>: “Lo innovador en la práctica pedagógica no reside en la pura aplicación de una nueva técnica de enseñanza, sino en la postura diferenciada que el profesor y los alumnos presenten en relación al conocimiento que se adquiriera siempre que propicie la investigación, el desarrollo de habilidades y facilite su aplicación en otros contextos”.

## **CONCLUSIONES**

Se presenta la resolución de problemas como punto de partida de una metodología que no se sigue habitualmente en las clases de Matemática y que puede suponer un aumento significativo de la motivación de nuestros estudiantes hacia esta habilidad tan importante intra y extraescolar.

La generalización de la experiencia en otras latitudes - aunque los resultados fueron muy positivos – depende del contexto. Se considera acertada la elaboración de los procedimientos didácticos para dirigir la actuación de los profesores y los estudiantes en situación docente típica, lo cual favorece la aplicación de la propuesta en otros contextos.

Algunos resultados:

La propuesta elaborada constituye una eficaz ayuda para los maestros y es perfectamente asimiladas por los estudiantes.

La adecuada selección del modelo a seguir, favorece la asimilación y el desarrollo de la habilidad de resolución de problemas

Las preguntas e impulsos heurísticos que caracterizan la propuesta contribuyen al proceso de asimilación del problema y a la apropiada aplicación de los conceptos.

Los problemas que se seleccionen, así como el proceder didáctico relacionado, pueden ser extendidos a otras escuelas siempre y cuando se garantice la preparación previa de los maestros.

## **REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

1 Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de EE.UU. NCTM; 1980.

2 Campistrous L. Aprender a resolver problemas aritméticos. La Habana: Editorial Pueblo y Educación; 2002

3 Halmos, P. The Heart of Mathematics, American Mathematical Monthly, 87(7); (1980), pp (519- 524)

4 Kleiner, I. Famous problems in mathematics, An outline of a course. For The learning of mathematics, 6(1); (1986), pp ( 31–38

5 Valle Lima A. Investigación pedagógica. Otra mirada. Instituto central de Ciencias Pedagógicas. Ministerio de Educación Cuba. Ciudad de la Habana; 2010

6 Carrasco A. Heurística. Aprender matemática resolviendo problemas. La Habana: Editorial Pueblo y Educación; 2012

7 Polya G. Mathematical Discovery: on Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving. 2 vols. John Wiley;1962-65

## **BIBLIOGRAFÍA**

MAT450 - Seminarios de Resolución de Problemas marzo de 2002

Poggioli L. Estrategias de resolución de problemas. Serie Enseñando a aprender. Caracas: Polar; 2001.

Polya G. A arte de resolver problemas. Rio de Janeiro: Interciência;1978.

Polya G. Mathematics and Plausible Reasoning. Vols I e II. Princeton; 1964.

Polya G. How To Solve It. Princeton: Princeton University Press; 1957.

Rebollar Morote, A. Una variante para la estructuración del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, a partir de una nueva forma de organización del contenido, en la escuela media cubana [Tesis Doctoral]. Santiago de Cuba; 2000.

Ron Galindo,J. Una estrategia didáctica para el proceso enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas en las clases de Matemática en la Educación Secundaria Básica [Tesis doctoral]. Ciudad de la Habana; 2007.

13 de marzo de 2021

Aceptado con recomendaciones: 23 de abril de 2021

Aceptado: 24 de junio de 2021

**Declaración de originalidad**

El (los) autor(es) de este artículo declara(n) que:

Este trabajo es original e inédito, no ha sido enviado a otra revista o soporte para su publicación.

Está(n) conforme(s) con las prácticas de comunicación de Ciencia Abierta.

Ha(n) participado en la organización, diseño y realización, así como en la interpretación de los resultados. Luego de la revisión del trabajo, su publicación en la revista Pedagogía Profesional.

NO HAY NINGUN CONFLICTO DE INTERÉS con otras personas o entidades.