Desigualdades para soluciones clásicas de la ecuación de conducción del calor en normas generales de Hölder

Inequalities for classic solutions of the equation of the conduction of the heat in general norms of Hölder

MSc. Enrique Ribas Rodríguez. Profesor Auxiliar. Departamento: Matemática-Física. Universidad de Ciencias Pedagógicas “Enrique José Varona”

E-mail: enriquearr@ucpejv.edu.cu

MSc. Julio Felipe García Herrera. Profesor Auxiliar. Departamento de Economía. Recursos humanos. Universidad de Ciencias Pedagógicas “Enrique José Varona”

E-mail: juliofgh@ucpejv.edu.cu

Recibido: febrero 2019 Aprobado: julio 2019

Resumen

En la teoría de las ecuaciones diferenciales diversos problemas de contorno para ecuaciones parabólicas modelan distintos fenómenos de la naturaleza y procesos de diversa índole. Para determinar la solución de tales problemas iniciales o de contorno se presentan numerosas dificultades pues en muy pocos casos puede encontrarse una solución exacta.

En la mayoría de los casos se estudia la solubilidad del problema y las propiedades que tienen tales soluciones.

Para la determinación de la solubilidad de estos problemas se utilizan dos vías:

1) Determinando la existencia del operador inverso mediante métodos del análisis funcional.
2) Aplicando el método de las estimaciones a priori.

En este último método se consideran dos tipos de estimaciones:

a) Estimación interior
b) Estimación hasta la frontera

En la estimación interior la desigualdad se obtiene en cada subdominio interior de la región considerada y no se llega hasta la frontera.

En la estimación hasta la frontera la desigualdad se obtiene en cada subdominio interior de la región considerada y en los puntos próximos a la frontera.

En este trabajo se obtienen estimaciones interiores para la ecuación de la conducción del calor en normas generales de Hölder.

Palabras clave: estimación, norma, ecuación, función, condición inicial, condición de contorno, variable espacial

Abstract

In the theory of the equations differential diverse contour problems for parabolic equations model different phenomena of the nature and processes of diverse nature. To determine the solution of such initial problems or of contour numerous difficulties are presented because in very few cases it can be an exact solution.

In most of the cases it is studied the solubility of the problem and the properties that have such solutions.

For the determination of the solubility of these problems two roads are used:

1) Determining the existence of the inverse operator by means of methods of the functional analysis.
2) Applying the method of the estimates a priori.

In this last method they are considered two types of estimates:

a) Interior estimate
b) Estimate until the frontier

In the interior estimate the inequality is obtained in each interior subdomain of the considered region and you doesn't arrive until the frontier.

In the estimate until the frontier the inequality is obtained in each interior subdomain of the considered region and in the next points to the frontier.

In this work, the interior estimates are obtained for the equation of the conduction of the heat in general norms of Hölder.

Keyword: estimate, norm, equation, function, initial condition, contour condition, space variable

Introducción

En Friedman (1964), se obtienen estimaciones interiores para las soluciones clásicas de la ecuación (1) suponiendo que f(t; x) sea una función continua según Hölder con exponente $0 < \alpha < 1$. En 1968, Ivanovich supuso que el término independiente f(t ; x) fuera una función que satisface la condición general de Hölder respecto a todas las variables. El propio Friedman mejora las condiciones para el mismo resultado suponiendo que f(t; x) sea continua con respecto a todas las variables y que satisfacen la condición de Hölder con exponente $0 < \alpha < 1$, respecto a las variables espaciales solamente.

El objetivo fundamental del trabajo consiste en la obtención de nuevas estimaciones interiores para soluciones clásicas de la ecuación (1) y sus derivadas hasta el segundo orden, bajo la suposición que el término independiente f(t; x) sea una función continua respecto a todas las variables en $Q_T =]0, T] \times \Omega$ y que satisface en Q_T la condición general uniforme de Hölder con exponente $\alpha(r) \in A_1$, respecto a las variables espaciales solamente. Se obtienen nuevas desigualdades interiores para las soluciones clásicas de la ecuación (1).

El método que se utiliza consiste en trabajar en una región interna (semicubo) y en él mayorar las derivadas hasta el segundo orden y las diferencias de las segundas derivadas como se muestra en (3).

Para lograr esa mayoración se aplica la teoría de Green para la solución de ecuaciones con coeficientes constantes mediante la llamada solución fundamental (10) (Citado por A.N. Tijonov y A.A. Samarsky en "Ecuaciones de la Física Matemática": 526)

Desarrollo

Definición : Se llama semicubo N = Nd (P_0) de tope $P_0 = (t_0, x^0)$, $x^0 = (x_1^0,,,,, x_n^0)$ y arista d >0 , al conjunto de puntos (t , x) , x = ($x_1,,,,,,x_n$) que satisfacen las desigualdades .

$$x_i^0 - d \leq x_i \leq x_i^0 + d \; ; \qquad t_0 - d^2 \leq t \leq t_0 \; ; \qquad i = 1,....,n$$

Sean P = (t , x) ; Q = (τ , y) puntos arbitrarios de Q_T , se llama **Distancia parabólica** entre los puntos P y Q a la medida

$$d(P,Q) = \left(|t-\tau| + |x-y|^2\right)^{1/2}$$

donde $|x-y| = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$

Para la obtención de las estimaciones interiores de las soluciones (clásicas) de la ecuación(1) se consideran éstas en los cilindros

$Q(\theta.\tau) \equiv \left]\theta, \tau\right] \times \Omega \subset Q_T$ sin ningún tipo de condiciones iniciales ó de contorno en

$\Gamma_t = \overline{Q}_T \setminus Q_T$

Sean q , m $\in Z_+$, $P(t,x)$, $Q(t,y)$, $x, y \in \Omega$; $0 \leq t \leq T$

$\Gamma_t = \{(\tau,\sigma) \in \Gamma_t \; ; \; 0 \leq \tau \leq t\}$

por d_P , d_{PQ} se entienden las magnitudes

$d_P = \inf_{R \in \Gamma_t} d(P, R)$; $d_{PQ} = \min(d_P, d_Q)$

Se dice que una función f definida en Q_T satisface la condición general uniforme de Hölder con exponente $\alpha(r)$; respecto a las variables espaciales solamente , si para cualquier par de puntos P(t , x) , Q (t , y) $\in Q_T$ se cumple que :

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq K \left(|x-y|\right)^{\alpha(|x-y|)} \;, \; K \equiv \text{constante} > 0$$

donde :

La función $\alpha(r)$ es definida y continua en R_{+}^{*} , tal que .

I) $\lim_{r\to 0^+} \alpha(r) = \lim_{r\to +\infty} \alpha(r) = \alpha \in [\,0,1\,[$; $\lim_{r\to 0^+} r\alpha(r)\ln r = \lim_{r\to +\infty} r\alpha(r)\ln r = 0$

Si $\alpha = 0$ entonces $\lim_{r\to 0^+} \alpha(r)\ln r = -\alpha$ y $\alpha(r) + r\alpha(r) \ln r > 0$

para $r \in R_0 = \left]0, R_0\right[\cup \left]\frac{1}{R_O}, +\infty\right[$ donde r_0 es un número suficientemente pequeño.

(Se supone que $\alpha(r)$ existe y es continua, por lo menos para $r \in R_0$)

De la condición I) se deduce que :

II) $r^{\alpha(r)}$ es monótona creciente para $r \in R_0$

III) $r^{\alpha(r)-\alpha}$ crece lentamente para , $r \in R_0$, es decir

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{(k\cdot r)^{\alpha(k\cdot r)-\alpha}}{r^{\alpha(r)-\alpha}} = 1,\ \text{uniformemente respecto a } k,\quad 0 < a \le k \le b < \infty .$$

Se denota por A_L , $L \in \mathbb{N}$, a la clase de las funciones , del tipo $\alpha(r)$ para las cuales

$$\left(A_{\alpha(r)}\right)^L = \left(\int_0^r t^{\alpha(r)-1}dt\right)^L < \alpha \quad ; \quad 0 < r \le d_0 = \text{diámetro de } \Omega$$

IV) $A\alpha(k\cdot r) \le k\,A\alpha(r)$, $k > 1$, $k.r < r_0$

$A\alpha(\gamma\cdot r) \ge \gamma\,A\alpha(r)$, $0 \le \gamma \le 1$, $r < r_0$

***Teorema**: Sea f una función continua en $\overline{Q_T} = [0,T] \times E_n$ y que satisface la condición general uniforme de Hölder de exponente $\alpha(r) \in A_1$ respecto a las variables espaciales solamente en $\overline{Q_T}$. Sea u(t,x) una función continua en $\overline{Q_T}$ de clase $C_{0,2+B_{\alpha(r)}}(Q_T)$ y que satisface la ecuación

$$L_0 u \equiv \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = f(t,x)\; en\; Q_T$$

Entonces existe $K = K(n, \alpha(r), B_{\alpha(r)}, T)$ tal que:

$$\left|D_x^i u(P)\right| \le d^{-i} K \sup_N |u| + d^{2-i} K \sup_N |f| + d^{2-i+\alpha(d)} K\, H_{P,N}[f] \equiv KI_i$$

$$(d)^{B_{\alpha(d)}} \frac{\left|D_x^i u(P) - D_x^i u(Q)\right|}{(P-Q)^{B_{\alpha(P-Q)}}} \le K\, I_I + K\, d^{2-i+\alpha(d)} H_{Q,N}[f], \quad i = 0, 1, 2$$

$$|u|_{0,2+B_{\alpha(r)}}^{Q_T} \le K\left(|u|_{0,0}^{Q_T} + |f|_{2,\alpha(r)}^{Q_T}\right), K = K(n, d_0) \qquad (2)$$

<u>Demostración</u>:

Como $M_{0,2}^{Q_T}[u], M_{0,2+B_{\alpha(r)}}^{Q_T}[u]$ son magnitudes finitas, existen dos puntos $P(t_0, x^0), Q(t_0, y^0)$ y una derivada $D_\alpha^2 u$, tales que $\frac{1}{2} M_{0,2}^{Q_T}[u] \le d_\rho^2 \left|D_x^2 u(P)\right|$ (3)

$$\frac{1}{2} M_{0,2+B_{\alpha(r)}}^{Q_T}[u] \le d_{PQ}^{2+B_{\alpha(d_{PQ})}} \frac{\left|D_x^2 u(P) - D_x^2 u(Q)\right|}{\left(|x_0 - y_0|\right)^{B_{\alpha(|x_0 - y_0|)}}} \qquad (4)$$

con $|x_0 - y_0| < \frac{1}{4} d$

Sea $N_d(P)$ el semicubo con tope en el punto P y arista $d = \mu d_\rho$

Sea $\varphi(Q) \in C^3(N_d(P))$ tal que

$$\varphi(Q) = \begin{cases} 1 & Q \in N_{\frac{1}{2}d}(P) \\ 0 & Q \in N_d(P) - N_{\frac{3}{4}d}(P) \end{cases} \qquad (5)$$

y $\left|D_t^l D_x^k \varphi(t,x)\right| \le A d^{-2l-k}, \quad 0 \le l + k \le 2$

Considerando la fórmula de Green para las funciones

$u(t,x)$ y $\varphi(t,x), \Gamma_0(t,\tau; x-\xi)$; donde

$$\Gamma_0(t,\tau;x-\xi)=\frac{1}{(4\pi(\tau-t))^{n/2}}\ \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(\tau-t)}\right),\ \tau>t \qquad (6)$$

es la solución fundamental de la ecuación adjunta de la ecuación $L_0\,u=0$ con singularidad en el punto (τ,ξ).

Se cumple que $\Gamma_0(t,\tau;x-\xi)\geq 0,\quad \int_{E_n}\Gamma_0(t,\tau;x-\xi)=1$ y para las derivadas de Γ_0 se tiene:

$$\left|D_t^l D_x^h\ \Gamma_0(t,\tau;x-\xi)\right|\leq k(t-\tau)^{-\frac{n+2l+k}{2}}\ \exp\left(-k\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right) \qquad (7)$$

La función $u(t,x)$ se expresa por

$$u(t,\xi)=-\int_{t_0-d^2}^{\tau}\int_B \varphi(t,x)f(t,x)\,\Gamma_0(t,\tau;x-\xi)dx\,dt+$$
$$+\int_{t_0-d^2}^{\tau}\int_B u(t,x)L_0^*[\varphi(t,x)f(t,x)\,\Gamma_0(t,\tau;x-\xi)]dx\,dt \qquad (8)$$

para cualquier $(\tau,\xi)\in N_{\frac{1}{2}d}(P)$, B es la base inferior del semicubo $N_\alpha(P)$.

Derivando como en el trabajo de Friedman (1964) en el punto $R=(\theta,\zeta)$

$$D_\zeta^2 u(\theta,\zeta)=-\int_{t_0-d^2}^{\theta}\int_B D^2\Gamma_0(t,\tau;x-\zeta)[\varphi(t,x)\,f(t,x)-\varphi(t,\zeta)\,f(t,\zeta)]dx\,dt+$$

$$-\int_{t_0-d^2}^{\theta}\varphi(t,\zeta)\,f(t,\zeta)\int_B D_\zeta^2\,\Gamma_0(t,\theta;x-\zeta)dx\,dt+$$

$$+\int_{t_0-d^2}^{\theta}\int_B u(t,x)\{(\Delta_x+D_t)[\varphi(t,x)D_\zeta^2\,\Gamma_0(t,\theta;x-\zeta)]\}\,dx\,dt$$

(**) Pasando la integral de volumen a una integral de superficie, derivando por dS_x, el elemento de superficie en el contorno ∂B

$$D_\zeta^2 u(\theta,\zeta)=-\int_{t_0-d^2}^{\theta}\int_B D^2\Gamma_0(t,\theta;x-\zeta)[\varphi(t,x)\,f(t,x)-\varphi(t,\zeta)\,f(t,\zeta)]dx\,dt+$$

$$- \int_{t_0-d^2}^{\theta} \varphi(t,\zeta)\, f(t,\zeta) \int_{\partial B} D_\zeta\, \Gamma_0(t,\theta; x-\zeta)\, dx\, dt +$$

$$+ \int_{t_0-d^2}^{\theta} \int_B u(t,x)\left\{(\Delta_x + D_t)\left[\varphi(t,x) D_\zeta^2\, \Gamma_0(t,\theta; x-\zeta)\right]\right\} dx\, dt$$

$$= I_1(R) + I_2(R) + I_3(R)$$

Sustituyendo R por P se tiene que

$$\left|D_\zeta^2(P)\right| \le \left|I_1(P)\right| + \left|I_2(P)\right| + \left|I_3(P)\right| . \quad (9)$$

Estimemos $\left|I_1(P)\right|$:

$$\left|I_1(P)\right| \le \int_{t_0-d^2}^{t_0} \int_B \left|D^2\Gamma_0(t, t_0, x-x_0)\right| \left|\varphi(t,x)\, f(t,x) - \varphi(t,x_0)\, f(t,x_0)\right| dx\, dt$$

ahora,

$$\left|\varphi(t,x)\, f(t,x) - \varphi(t,x_0)\, f(t,x_0)\right| \le$$

$$M_{2,\alpha(x)}^{t_0}[f] \frac{d_\rho^{-2}}{\left(d_{PQ}\right)^{\alpha(d_{PQ})}} \left(\left|x-x_0\right|\right)^{\alpha(\left|x-x_0\right|)} + \frac{\left|x-x_0\right|}{d} d_\rho^{-2}\, M_{2,0}^{t_0}[f] \quad (10)$$

Teniendo en cuenta (7):

$$\left|I_1(P)\right| \le K \int_{t_0-d^2}^{t_0} \int_B (t_0 - t)^{-\frac{n+2}{2}} e^{-k\frac{\left|x-x_0\right|^2}{t_0-t}} \times$$

$$\times\left(M_{2,\alpha(x)}^{t_0}[f] \frac{d_P^{-2}}{\left(d_{PQ}\right)^{\alpha(d_{PQ})}} \left(\left|x-x_0\right|\right)^{\alpha(\left|x-x_0\right|)} + \frac{\left|x-x_0\right|}{d} d_P^{-2}\, M_{2,0}^{t_0}[f] \right) dx\, dt$$

Haciendo cambio de variables:

$$r = \left|x-x_0\right| \qquad dx = r^{n-1}\, dx$$

$$\rho = \frac{r^2}{t_0 - t} \qquad dt = r^2 \rho^{-2}\, d\rho \qquad (11)$$

$$\left|I_1(P)\right| \le K \int_{\frac{r^2}{d^2}}^{\infty} \int_0^d \frac{\rho^{\frac{n+2}{2}-2}}{r^{n+x}} e^{-k\rho} \times$$

$$\times\left(M_{2,\alpha(x)}^{t_0}[f]\frac{d_\rho^{-2}}{(d_{PQ})^{\alpha(d_{PQ})}}r^{\alpha(r)-1}+\frac{r}{d}d_\rho^{-2}M_{2,0}^{t_0}[f]\right)dr\,d\rho$$

$$\le K\int_{\frac{r^2}{d^2}}^{\infty}\rho^{\frac{n}{2}-1}e^{-k\rho}\,d\rho\int_0^d\left(M_{2,\alpha(x)}^{t_0}[f]\frac{d_\rho^{-2}}{(d_{PQ})^{\alpha(d_{PQ})}}r^{\alpha(r)-1}+\frac{r}{d}d_\rho^{-2}M_{2,0}^{t_0}[f]\right)dr$$

$$|I_1(P)|\le K\left[M_{2,\alpha(x)}^{t_0}[f]\frac{d_\rho^{-2}}{(d_{PQ})^{\alpha(d_{PQ})}}\int_0^d r^{\alpha(r)-1}dr+d_\rho^{-2}M_{2,0}^{t_0}[f]\right]$$

$$|I_1(P)|\le K\frac{d_\rho^{-2}}{(d_{PQ})^{\alpha(d_{PQ})}}M_{2,\alpha(x)}^{t_0}[f]\,A_{\alpha(d)}+d_\rho^{-2}M_{2,0}^{t_0}[f]\qquad(12)$$

$$\left(A_{\alpha(d)}=d^{B_{\alpha(d)}}\right)$$

Mayoremos $|I_2(P)|$.

De (8), (6), (5)

$$|I_2(P)|\le d_P^{-2}M_{2,0}^{t_0}[f]\int_{t_0-d^2}^{t_0}\int_{\partial B}|D_\zeta\,\Gamma_0(t,t_0;x-x_0)|\,dS_x\,dt$$

Aplicando la desigualdad $|x-x_0|>\frac{3}{4}d$ para $x\in\partial B$ y sustituyendo $z=\frac{d^2}{t_0-t}$,

$$dz=\frac{d^2}{(t_0-t)^2}\,dt\,,\quad dt=\frac{(t_0-t)^2}{d^2}\,dz=\frac{d^2}{z^2}\,dz\qquad(13)$$

$$|I_2(P)|\le kd_\rho^{-2}M_{2,0}^{t_0}[f]\int_{t_0-d^2}^{t_0}\int_{\partial B}(t_0-t)^{-\frac{n+1}{2}}e^{-k\frac{|x-x_0|^2}{t_0-t}}\,dS_x\,dt\le$$

$$|I_2(P)|\le kd_\rho^{-2}M_{2,0}^{t_0}[f]\int_{t_0-d^2}^{t_0}\int_{\partial B}(t_0-t)^{-\frac{n+1}{2}}e^{-k\frac{|x-x_0|^2}{t_0-t}}\,dS_x\,dt\le$$

$$\le kd_\rho^{-2}M_{2,0}^{t_0}[f]\int_{t_0-d^2}^{t_0}(t_0-t)^{-\frac{n+1}{2}}e^{-k\frac{d^2}{t_0-t}}\,d^{n-1}\,dt$$

$$|I_2(P)|\le k\,d^{n-1}d_\rho^{-2}M_{2,0}^{t_0}[f]\int_1^\infty\left(\frac{z}{d^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}e^{-kz}\,d^2z^{-2}\,dz$$

$$\le k\,d^{n-1}d_\rho^{-2}M_{2,0}^{t_0}[f]\int_1^\infty z^{\frac{n+1}{2}-2}e^{-kz}\,\frac{d^2}{d^{n+1}}\,dz$$

$$|I_2(P)|\le k\,d_\rho^{-2}M_{2,0}^{t_0}[f]\qquad(14)$$

Mayoremos $|I_3(P)|$. Del hecho que $\Delta_\xi\,\Gamma_0+D_t\,\Gamma_0=0$ y que $L^*\,\Gamma_0=0$

$$|I_3(P)| \le k\, M_{0,0}^{t_0}[u] \int_E \sum_{i=1}^{n} \left(\left|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}\right| \left|D_\xi^2\ \Gamma_0(t,t_0,x-\xi)\right| + \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right| \left|D^3\ \Gamma_0(t,t_0,x-\xi)\right| + \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right| \left|D_\xi^2\ \Gamma_0\right| \right) + + |D_t\varphi| \left|D_\xi^2\ \Gamma_0(t,t_0,x-\xi)\right| dx\, dt \le$$

$$k\, M_{0,0}^{t_0}[u] \iint_E d^{-2}(t_0-t)^{-\frac{n+2}{2}} e^{-k\frac{|x-\tau|^2}{t_0-t}} + d^{-1}(t_0-t)^{-\frac{n+3}{2}} e^{-k\frac{|x-\tau|^2}{t_0-t}} + + d^{-1}(t_0-t)^{-\frac{n+2}{2}} e^{-k\frac{|\ |}{t_0-t}} dx\, dt$$

$$|I_3(P)| \le k\, M_{0,0}^{t_0}[u] \iint_E \left[(d^{-2}+d^{-1})(t_0-t)^{-\frac{n+2}{2}} + d^{-1}(t_0-t)^{-\frac{n+3}{2}} \right] e^{-k\frac{|x-x_0|^2}{t_0-t}} dx\, dt \qquad (15)$$

$$E = \left(N_{\frac{3}{4}d}(P) - N_{\frac{1}{2}d}(P) \right)$$

Sea $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 = \left\{ (t,x) \in E : |x-x_0| > \dfrac{d}{2} \right\}$, $E_2 = E \setminus E_1$

Considerando la desigualdad $|x-x_0| \ge \dfrac{d}{4}$ para $(t,x) \in E_1$

y sustituyendo $z = \dfrac{d^2}{t_0-t}$, $dt = \dfrac{d^2}{z^2}\, dz$

$$\int_{t_0-d^2}^{t_0} \int_{B_1} \left[(d^{-2}+d^{-1})(t_0-t)^{-\frac{n+2}{2}} + d^{-1}(t_0-t)^{-\frac{n+3}{2}} \right] e^{-k\frac{d^2}{t_0-t}}\, d^2 z^{-2}\, dx\, dz$$

$$= \int_1^{\infty} \int_{B_1} \left[(d^{-2}+d^{-1}) \frac{z^{\frac{n+2}{2}}}{d^{n+2}} + d^{-1} \frac{z^{\frac{n+3}{2}}}{d^{n+3}} \right] e^{-kz}\, d^2 z^{-2}\, dx\, dz$$

$$= d^n \int_1^{\infty} \left[(d^{-2}+d^{-1}) \frac{z^{\frac{n}{2}-1}}{d^{n+2}} + d^{-1} \frac{z^{\frac{n+1}{2}-1}}{d^{n+1}} \right] e^{-kz}\, dz \le k \left[d^n \left(\frac{d^{-2}+d^{-1}}{d^n} \right) + \frac{1}{d^{n+2}} \right]$$

luego $\displaystyle\int_{t_0-d^2}^{t_0} \int_{B_1} \left[(d^{-2}+d^{-1})(t_0-t)^{-\frac{n+2}{2}} + d^{-1}(t_0-t)^{-\frac{n+3}{2}} \right] e^{-k\frac{|x-x_0|^2}{t_0-t}} dx\, dt \le$

$\le k(2d^{-2}+d^{-1}) \le k d^{-2}$ (16).

De $(t_0-t) > \left(\dfrac{d}{4}\right)^2$, si $(t,x) \in B_2$ (recordar que $|x_0-y_0| < \dfrac{d}{4}$)

$$\int_{t_0-d^2}^{t_0} \int_{B_2} \left[(d^{-2}+d^{-1})(t_0-t)^{-\frac{n+2}{2}} + d^{-1}(t_0-t)^{-\frac{n+3}{2}} \right] e^{-k\frac{|x-x_0|^2}{t_0-t}} dx\, dt \le$$

$$\leq k\int_{t_0-d^2}^{t_0}\int_{B_2}\left[\left(d^{-2}+d^{-1}\right)\frac{1}{d^{n+2}}+\frac{d^{-1}}{d^{n+3}}\right]e^{-k\frac{|x-x_0|^2}{d^2}}\,dx\,dt\leq$$

$$\leq kd^2\int_{B_2}\left[\left(d^{-2}+d^{-1}\right)\frac{1}{d^{n+2}}+\frac{d^{-1}}{d^{n+3}}\right]e^{-k\frac{|x-x_0|^2}{d^2}}\,dx\leq$$

$$\leq k\left(\frac{2}{d^{n+2}}+\frac{1}{d^{n+1}}\right)\int_{B_2}e^{-k\frac{|x-x_0|^2}{d^2}}\,dx\leq$$

$$\leq k\left(\frac{2}{d^{n+2}}+\frac{1}{d^{n+1}}\right)Vol(B_2)\leq kd^n\left(\frac{2}{d^{n+2}}+\frac{1}{d^{n+1}}\right)\leq$$

$$\leq k\left(\frac{1}{d^2}+\frac{1}{d}\right)\leq kd^{-2}\quad(17)$$

luego, de (15), (16) y (17) se obtiene que

$$\left|I_3(P)\right|\leq kd^{-2}M_{0,0}^{t_0}[u]\quad(18)$$

y, de (9), (12), (14) y (18) se tiene que

$$\left|D_x^2u(P)\right|\leq k\,\frac{d_\rho^{-2}}{\left(d_{PQ}\right)^{\alpha(d_{PQ})}}\,M_{2,\alpha(r)}^{t_0}[f]\,A_{\alpha(d)}+k\,d_\rho^{-2}M_{2,0}^{t_0}[f]+k\left(d^{-2}\right)M_{0,0}^{t_o}[u]$$

y de (3):

$$\frac{1}{2}M_{0,2}^{t_0}[u]\leq k\,\frac{A_{\alpha(d)}}{\left(d_{PQ}\right)^{\alpha(d_{PQ})}}\,M_{2,\alpha(r)}^{t_0}[f]+k\,M_{2,0}^{t_0}[f]+\left(d^{-2}\right)d_\rho^2\,k\,M_{0,0}^{t_0}[u]$$

$$\frac{1}{2}M_{0,2}^{t_0}[u]\leq k\,\frac{A_{\alpha(d)}}{\left(d_{PQ}\right)^{\alpha(d_{PQ})}}\,M_{2,\alpha(r)}^{t_0}[f]+k\,M_{2,0}^{t_0}[f]+kd^{-2}d_\rho^2\,M_{0,0}^{t_0}[u]\quad(19)$$

$$\frac{1}{2}M_{0,2}^{t_0}[u]\leq k\,\frac{d^{B(r)}}{\left(d_\rho\right)^{\alpha(d_\rho)}}\,M_{2,\alpha(r)}^{t_0}[f]+k\,M_{2,0}^{t_0}[f]+k(\mu)M_{0,0}^{t_0}[u]$$

Para $0<r<1$, $r\,d_\rho<d_\rho\Rightarrow d^{\alpha(d)}<\left(d_\rho\right)^{\alpha(d_\rho)}\Rightarrow\dfrac{1}{d^{\alpha(d)}}>\dfrac{1}{\left(d_\rho\right)^{\alpha(d_\rho)}}$

luego,

$$M_{0,2}^{t_0}[u]\leq k\,d^{B_{\alpha(d)}-\alpha(d)}M_{2,\alpha(r)}^{t_0}[f]+k\,M_{2,0}^{t_0}[f]+k(\mu)M_{0,0}^{t_0}[u]$$

Mayoremos $M_{0,2+B_{\alpha(r)}}^{t_0}[u]$.

Consideremos los puntos P, Q que satisfacen la condición (4). Supongamos, por ejemplo, que $d_{PQ}=d_\rho$ y consideremos $d(P,Q)\leq\frac{1}{4}d$, o sea, $\left|x_0-y_0\right|\leq\frac{1}{4}d$. Según la desigualdad (9):

$$\left|D^2u(P)-D^2u(Q)\right|\le\left|I_1(P)-I_1(Q)\right|+\left|I_2(P)-I_2(Q)\right|+\left|I_3(P)-I_3(Q)\right| \quad (20)$$

Para $\delta=\dfrac{|x_0-y_0|}{2}$

$$\left|I_1(P)-I_1(Q)\right|=\Big|\int_{t_0-d^2}^{t_0}\int_B\{D^2\Gamma_0(t,t_0,x-x_0)[\varphi(t,x)f(t,x)-\varphi(t,x_0)f(t,x_0)]-$$

$$-D^2\Gamma_0(t,t_0,x-y_0)[\varphi(t,x)f(t,x)-\varphi(t,y_0)f(t,y_0)]\ \}\,dx\,dt\ \Big|$$

$$\le\left|\int_{t_0-d^2}^{t_0-\delta^2}\int_B[D^2\Gamma_0(t,t_0,x-x_0)-D^2\Gamma_0(t,t_0,x-y_0)][\varphi(t,x)f(t,x)-\varphi(t,x_0)f(t,x_0)]\,dx\,dt\right|+$$

$$+\left|\int_{t_0-d^2}^{t_0-\delta^2}\int_B D^2\Gamma_0(t,t_0,x-y_0)\,[\varphi(t,y_0)f(t,y_0)-\varphi(t,x_0)f(t,x_0)]\,dx\,dt\right|+$$

$$++\left|\int_{t_0-d^2}^{t_0}\int_B D^2\Gamma_0(t,t_0,x-x_0)\,[\varphi(t,x)f(t,x)-\varphi(t,x_0)f(t,x_0)]\,dx\,dt\right|+$$

$$+\left|\int_{t_0-d^2}^{t_0}\int_B D^2\Gamma_0(t,t_0,x-y_0)\,[\varphi(t,x)f(t,x)-\varphi(t,y_0)f(t,y_0)]\,dx\,dt\right|$$

$$=V_1+V_2+V_3+V_4 \quad (21)$$

Mayoremos V_1 aplicando el teorema del valor medio de Lagrange, y (10) y el cambio de variables $\rho=\dfrac{|x-x_0|}{(t_0-t)^{\frac{1}{2}}},\quad dx=(t_0-t)^{\frac{n}{2}}\rho^{n-1}\,d\rho$ (22)

$$V_1\le k\int_{t_0-d^2}^{t_0-\delta^2}\int_B(t_0-t)^{-\frac{n+3}{2}}e^{-k\frac{|x-x_0|^2}{t_0-t}}\left(\frac{M^{t_0}_{2,\alpha(r)}[f](|x-x_0|)^{\alpha(|x-x_0|)}}{(d_{PQ})^{\alpha(d_{PQ})+2}}+d_\rho^{-2}M^{t_0}_{2,0}[f]\frac{|x-x_0|}{d}\right)|x_0-y_0|\,dx\,dt$$

$$\le k\ |x_0-y_0|\ \frac{M^{t_0}_{2,\alpha(r)}[f]}{(d_{PQ})^{\alpha(d_{PQ})+2}}\int_{t_0-d^2}^{t_0-\delta^2}\int_B(t_0-t)^{-\frac{n+3}{2}}(|x_0-x_0|)^{\alpha(|x-x_0|)}e^{-k\frac{|x-x_0|^2}{t_0-t}}\ dx\,dt+$$

$$+k\frac{|x_0-y_0|}{d}d_\rho^{-2}M^{t_0}_{2,0}[f]\int_{t_0-d^2}^{t_0-\delta^2}\int_B(t_0-t)^{-\frac{n+3}{2}}e^{-k\frac{|x-x_0|^2}{t_0-t}}|x_0-x_0|\,dx\,dt$$

$$\le k|x_0-y_0|\frac{M^{t_0}_{2,\alpha(r)}[f]}{(d_{PQ})^{\alpha(d_{PQ})+2}}\int_{t_0-d^2}^{t_0-\delta^2}\int_{B^*}(t_0-t)^{-\frac{n+3}{2}+\frac{n}{2}}\left[(t_0-t)^{\frac{1}{2}}\rho\right]^{\alpha\left[(t_0-t)^{\frac{1}{2}}\rho\right]}\rho^{n-1}e^{-k\rho^2}\,d\rho\,dt+$$

$$k\frac{|x_0-y_0|}{d}d_\rho^{-2}M_{2,0}^{t_0}[f]\int_{t_0-d^2}^{t_0-\delta^2}\int_{B^*}(t_0-t)^{-1}\rho^n e^{-k\delta^2}\,d\rho\,dt$$

Como $0< t_0-t< d^2$, para $d< r_0$

$$V_1\le k|x_0-y_0|\frac{M_{2,\alpha(r)}^{t_0}[f]}{(d_{PQ})^{\alpha(d_{PQ})+2}}\int_{t_0-d^2}^{t_0-\delta^2}(t_0-t)^{-\frac{3}{2}}\int_{B^*}\frac{(d_\rho)^{\alpha(d_\rho)-\alpha}}{\rho^{\alpha(r)-\alpha}}d^\alpha\rho^{n-1}e^{-k\rho^2}\,d\rho\,dt+$$

$$+k\frac{|x_0-y_0|}{d}d_\rho^{-2}M_{2,0}^{t_0}[f]\int_{t_0-d^2}^{t_0-\delta^2}\frac{dt}{t_0-t}$$

$$\le k|x_0-y_0|\frac{M_{2,\alpha(r)}^{t_0}[f]}{(d_{PQ})^{\alpha(d_{PQ})+2}}d^\alpha\int_{t_0-d^2}^{t_0-\delta^2}(t_0-t)^{-\frac{3}{2}}\,dt+$$

$$+k\frac{|x_0-y_0|}{d}d_\rho^{-2}M_{2,0}^{t_0}[f]\frac{1}{\delta^2}\left(d^2-\delta^2\right)+$$

$$k|x_0-y_0|\frac{M_{2,\alpha(r)}^{t_0}[f]}{(d_{PQ})^{\alpha(d_{PQ})+2}}d^\alpha(t_0-t)^{-\frac{1}{2}}\Big|_{t_0-d^2}^{t_0-\delta^2}$$

Utilizando la relación $\frac{1}{d^2}<\frac{1}{t_0-t}<\frac{1}{\delta^2}$ para realizar la mayoración correspondiente:

$$V_1\le k|\,x_0-y_0|\left(d_\rho^{-2}M_{2,0}^{t_0}[f]\frac{d^2}{\delta^2}+\frac{d^\alpha d_{PQ}^{-2}M_{2,\alpha(r)}^{t_0}[f]}{(d_{PQ})^{\alpha(d_{PQ})}}\left[\frac{1}{\delta}-\frac{1}{d}\right]\right)$$

$$\le k|x_0-y_0|\left(\frac{d_\rho^{-2}}{d}M_{2,0}^{t_0}[f]+\frac{d^\alpha d_{PQ}^{-2}}{d_{PQ}^{\alpha(d_{PQ})}}M_{2,\alpha(r)}^{t_0}[f]\right)\frac{d^2}{\delta^2}\quad(23)$$

Mayoremos V_2

Aplicando (9) y el teorema de la divergencia de Gauss-Ostrogradski

$$V_2\le k\int_{t_0-d^2}^{t_0-\delta^2}(t_0-t)^{-\frac{n+1}{2}}\left(\frac{d_{PQ}^{-2}}{d_{PQ}^{\alpha(d_{PQ})}}M_{2,\alpha(r)}^{t_0}[f](|x_0-y_0|)^{\alpha(|x_0-y_0|)}+d_\rho^{-2}M_{2,0}^{t_0}[f]\frac{|x_0-y_0|}{d}\right)\int_{\partial B}e^{-k\frac{|x-x_0|^2}{t_0-t}}\,dS_x\,dt$$ Considerando $i\,|x-y_0|\ >\ d^{t-t_0}$

$$V_2\le k\int_{t_0-d^2}^{t_0-\delta^2}(t_0-t)^{-\frac{n+1}{2}}\left(\frac{d_{PQ}^{-2}}{d_{PQ}^{\alpha(d_{PQ})}}M_{2,\alpha(r)}^{t_0}[f]\,(|x_0-y_0|)^{\alpha(|x_0-y_0|)}+d_\rho^{-2}M_{2,0}^{t_0}[f]\frac{|x_0-y_0|}{d}\right)\int_{\partial B}e^{-k\frac{d^2}{t_0-t}}dS_x\,dt$$

$$\le k\,d^{n-1}\int_{t_0-d^2}^{t_0-\delta^2}(t_0-t)^{-\frac{n+1}{2}}e^{-k\frac{d^2}{t_0-t}}\left(\frac{d_{PQ}^{-2}}{d_{PQ}^{\alpha(d_{PQ})}}M_{2,\alpha(r)}^{t_0}[f]\,(|x_0-y_0|)^{\alpha(|x_0-y_0|)}+d_\rho^{-2}M_{2,0}^{t_0}[f]\frac{|x_0-y_0|}{d}\right)dt$$ Haciendo el cambio $z=\frac{d^2}{t_0-t}$, $dt=d^2z^{-2}dt$

$$V_2 \le k\, d^{n-1} \int_1^{\frac{d^2}{\delta^2}} \left(\frac{d^2}{z}\right)^{-\frac{n+1}{2}} e^{-kz} d^2 z^{-2} \left(\frac{d_{PQ}^{-2}}{d_{PQ}^{\alpha(d_{PQ})}} M_{2,\alpha(r)}^{t_0}[f]\left(|x_0-y_0|\right)^{\alpha(|x_0-y_0|)} + d_\rho^{-2} M_{2,0}^{t_0}[f] \frac{|x_0-y_0|}{d} \right) dz$$

$$\le k\left(\frac{d_{PQ}^{-2}}{d_{PQ}^{\alpha(d_{PQ})}} M_{2,\alpha(r)}^{t_0}[f]\left(|x_0-y_0|\right)^{\alpha(|x_0-y_0|)} + d_\rho^{-2} M_{2,0}^{t_0}[f] \frac{|x_0-y_0|}{d} \right) \qquad (24)$$

Haciendo el cambio $|x-x_0| = (t_0-t)^{\frac{1}{2}}\rho$, $\rho = \frac{|x-x_0|}{(t_0-t)^{\frac{1}{2}}}$, $dx = (t_0-t)^{\frac{1}{2}}\delta^{n-1} d\rho$

$$|V_3| \le \int_{t_0-\delta^2}^{t_0} \int_B \left| D^2\Gamma_0(t,t_0,x-x_0) \right| \left| \varphi(t,x) f(t,x) - \varphi(t,x_0) f(t,x_0) \right| dx\, dt$$

$$\le \int_{t_0-\delta^2}^{t_0} \int_B (t_0-t)^{-\frac{n+2}{2}} e^{-k\frac{|x-x_0|^2}{t_0-t}} \left(\frac{M_{2,\alpha(r)}^{t_0}[f]\left(|x-x_0|\right)^{\alpha(|x-x_0|)}}{(d_{PQ})^{\alpha(d_{PQ})+2}} + d_\rho^{-2} M_{2,0}^{t_0}[f] \frac{|x-x_0|}{d} \right) dx\, dt$$

$$\le \int_{t_0-\delta^2}^{t_0} \int_0^{\infty} (t_0-t)^{-\frac{n+2}{2}} e^{-k\rho^2} (t_0-t)^{\frac{n}{2}} \rho^{n-1} \left(\frac{M_{2,\alpha(r)}^{t_0}[f]\left(|x-x_0|\right)^{\alpha(|x-x_0|)}}{(d_{PQ})^{\alpha(d_{PQ})+2}} + d_\rho^{-2} M_{2,0}^{t_0}[f] \frac{|x-x_0|}{d} \right) d\rho\, dt$$

$$\le \int_{t_0-\delta^2}^{t_0} \int_0^{\infty} (t_0-t)^{-1} \rho^{n-1} e^{-k\rho^2} \left(\frac{M_{2,\alpha(r)}^{t_0}[f]\left[(t_0-t)^{\frac{1}{2}}\rho\right]^{\alpha\left((t_0-t)^{\frac{1}{2}}\rho\right)}}{(d_{PQ})^{\alpha(d_{PQ})+2}} + d_\rho^{-2} M_{2,0}^{t_0}[f] \frac{(t_0-t)^{\frac{1}{2}}}{d}\rho \right) d\rho\, dt$$

$$\le \int_{t_0-\delta^2}^{t_0} (t_0-t)^{-1} \int_0^{\infty} \rho^{n+1} e^{-k\rho^2} \left(\frac{M_{2,\alpha(r)}^{t_0}[f](\delta\rho)^{\alpha(\delta\rho)}}{(d_{PQ})^{\alpha(d_{PQ})+2}} + d_\rho^{-2} M_{2,0}^{t_0}[f] \frac{\delta}{d}\rho \right) d\rho\, dt$$

$$\le \frac{M_{2,\alpha(r)}^{t_0}[f]}{(d_{PQ})^{\alpha(d_{PQ})+2}} \int_{t_0-\delta^2}^{t_0} (t_0-t)^{-1} \int_0^{\infty} \rho^{n+1} e^{-k\rho^2} (\delta\rho)^{\alpha(\delta\rho)} d\rho\, dt +$$

$$+ d_\rho^{-2} M_{2,0}^{t_0}[f] \int_{t_0-\delta^2}^{t_0} (t_0-t)^{-1} \int_0^{\infty} \rho^{n+2} e^{-k\rho^2} d\rho\, dt \frac{\delta}{d}$$

$$\le \frac{M_{2,\alpha(r)}^{t_0}[f]}{(d_{PQ})^{\alpha(d_{PQ})+2}} \int_{t_0-\delta^2}^{t_0} (t_0-t)^{-1} \int_0^{\infty} \rho^{n+1} e^{-k\rho^2} \frac{(\delta\rho)^{\alpha(\delta\rho)-\alpha}}{\rho^{\alpha(\rho)-\alpha}} \delta^\alpha\, d\rho\, dt + d_\rho^{-2} M_{2,0}^{t_0}[f] \int_{t_0-\delta^2}^{t_0} (t_0-t)^{-1}\, dt \frac{\delta}{d}$$

$$\le k \frac{M_{2,\alpha(r)}^{t_0}[f]}{(d_{PQ})^{\alpha(d_{PQ})+2}} \delta^\alpha \int_{t_0-\delta^2}^{t_0} \frac{dt}{t_0-t} + d_\rho^{-2} M_{2,0}^{t_0}[f] \frac{\delta}{d}$$

$$\le k \frac{M_{2,\alpha(r)}^{t_0}[f]}{(d_{PQ})^{\alpha(d_{PQ})+2}} \delta^\alpha + d_\rho^{-2} d^{-1} M_{2,0}^{t_0}[f]\delta \qquad (25)$$

Análogamente a $|V_3|$ se estima $|V_4|$

$$|V_4| \le \int_{t_0-\delta^2}^{t_0} \int_B (t_0-t)^{-\frac{n+2}{2}} e^{-k\frac{|x-y_0|^2}{t_0-t}} \left(\frac{M^{t_0}_{2,\alpha(r)}[f](|x-y_0|)^{\alpha(|x-y_0|)}}{(d_{PQ})^{\alpha(d_{PQ})+2}} + d_\rho^{-2} M^{t_0}_{2,0}[f] \frac{|x-y_0|}{d} \right) dx\, dt$$

$$\le \int_{t_0-\delta^2}^{t_0} (t_0-t)^{-1} \int_0^\infty \rho^{n-1} e^{-k\rho^2} \left(\frac{M^{t_0}_{2,\alpha(r)}[f](\delta\rho)^{\alpha(\delta\rho)}}{(d_{PQ})^{\alpha(d_{PQ})+2}} + d_\rho^{-2} M^{t_0}_{2,0}[f] \frac{\delta}{d}\rho \right) d\rho\, dt$$

$$\le \frac{M^{t_0}_{2,\alpha(r)}[f]}{(d_{PQ})^{\alpha(d_{PQ})+2}} \int_{t_0-\delta^2}^{t_0} (t_0-t)^{-1} \int_0^\infty \rho^{n-1+\alpha(\rho)} e^{-k\rho^2} \frac{(\delta\rho)^{\alpha(\delta\rho)-\alpha}}{\rho^{\alpha(\rho)-\alpha}} \delta^\alpha\, d\rho\, dt +$$

$$+ d_\rho^{-2} M^{t_0}_{2,0}[f]\, \delta \int_{t_0-\delta^2}^{t_0} (t_0-t)^{-1} \int_0^\infty \rho^n e^{-k\rho^2} d\rho\, dt$$

$$\le k \frac{M^{t_0}_{2,\alpha(r)}[f]}{(d_{PQ})^{\alpha(d_{PQ})+2}} \delta^\alpha \int_{t_0-\delta^2}^{t_0} (t_0-t)^{-1} dt + d_\rho^{-2} M^{t_0}_{2,0}[f]\, \delta \int_{t_0-\delta^2}^{t_0} (t_0-t)^{-1} dt$$

$$\le k \frac{M^{t_0}_{2,\alpha(r)}[f]}{(d_{PQ})^{\alpha(d_{PQ})+2}} \delta^\alpha d_\rho^{-2} M^{t_0}_{2,0}[f]\, \delta \qquad (26)$$

De (21), (23), (24), (25) y (26) se tiene que:

$$|I_1(P)-I_1(Q)| \le k|x_0-y_0| \left(\frac{d_\rho^{-2}}{d} M^{t_0}_{2,0}[f] + d^\alpha \frac{d^2_{PQ}}{d^{\alpha(d_{PQ})}_{PQ}} M^{t_0}_{2,\alpha(r)}[f] \right) \frac{d^2}{\delta^2} +$$

$$+ k\left[|x_0-y_0|^\alpha + (|x_0-y_0|)^{\alpha(|x_0-y_0|)}\right] \frac{M^{t_0}_{2,\alpha(r)}[f]}{(d_{PQ})^{\alpha(d_{PQ})+2}} + d_\rho^{-2} |x_0-y_0|\, M^{t_0}_{2,0}[f] \qquad (27)$$

Mayoremos $|I_2(P)-I_2(Q)|$

$$|I_2(P)-I_2(Q)| \le \Bigg| \int_{t_0-d^2}^{t_0} \varphi(t,x_0) f(t,x_0)\, D_\xi \left(-\int_B D_x\Gamma_0(t,t_0,x-x_0) dx \right) dt -$$

$$- \int_{t_0-d^2}^{t_0} \varphi(t,y_0) f(t,y_0)\, D_\xi \left(\int_B D_x\Gamma_0(t,t_0,x-y_0) dx \right) dt \Bigg|$$

$$= \left| \int_{t_0-d^2}^{t_0} [\varphi(t,x_0) f(t,x_0) - \varphi(t,y_0) f(t,y_0)] D_\xi \left(-\int_B D_x\Gamma_0(t,t_0,x-x_0) dx \right) dt \right| +$$

$$+ \left| \int_{t_0-d^2}^{t_0} \varphi(t,x_0) f(t,y_0) \left[D_\xi \left(-\int_B D_x\Gamma_0(t,t_0,x-x_0) dx \right) - D_\xi \left(-\int_B D_x\Gamma_0(t,t_0,x-y_0) dx \right) \right] dt \right|$$

$$+ \left| \int_{t_0-d^2}^{t_0} \left\{ [\varphi(t,x_0) f(t,y_0) - \varphi(t,y_0) f(t,y_0)] D_\xi \left(-\int_B D_x\Gamma_0(t,t_0,x-y_0) dx \right) \right\} dt \right|$$

$$\le W_{21} + W_{22} + W_{23} \qquad (28)$$

Aplicando el teorema de Gauss-Ostrogradski, y el cambio $z = \dfrac{d^2}{t_0 - t}$

$$|W_{21}| \le \left(\frac{d_{PQ}^{-2}}{d_{PQ}^{\alpha(d_{PQ})}} M_{2,\alpha(r)}^{t_0}[f]\left(|x_0 - y_0|\right)^{\alpha(|x_0-y_0|)} \right) \int_{t_0-d^2}^{t_0} \int_{\partial B} (t_0 - t)^{-\frac{n+1}{2}} e^{-k\frac{|x-x_0|^2}{t-t_0}} dS_x \, dt$$

$$\le \left(\frac{d_{PQ}^{-2}}{d_{PQ}^{\alpha(d_{PQ})}} M_{2,\alpha(r)}^{t_0}[f]\left(|x_0 - y_0|\right)^{\alpha(|x_0-y_0|)} \right) \int_{t_0-d^2}^{t_0} \int_{\partial B} (t_0 - t)^{-\frac{n+1}{2}} e^{-k\frac{d^2}{t-t_0}} dS_x \, dt$$

$$\le \left(\frac{d_{PQ}^{-2}}{d_{PQ}^{\alpha(d_{PQ})}} M_{2,\alpha(r)}^{t_0}[f]\left(|x_0 - y_0|\right)^{\alpha(|x_0-y_0|)} \right) \int_{1}^{\infty} d^{-n+1} z^{\frac{n+1}{2}} e^{-kz} d^{n-1} d^2 z^{-2} dz$$

$$\le \left(\frac{d_{PQ}^{-2}}{d_{PQ}^{\alpha(d_{PQ})}} M_{2,\alpha(r)}^{t_0}[f]\left(|x_0 - y_0|\right)^{\alpha(|x_0-y_0|)} \right) \quad (29)$$

Aplicando el teorema del valor medio, el teorema de Gauss-Ostrogradski y teniendo en cuenta para $x_0 \in \partial B : |x - x_0| \ge \frac{1}{4} d$

$$|W_{22}| \le d_\rho^{-2} M_{2,\alpha}^{t_0}[f] \int_{t_0-d^2}^{t_0} \left[\int_{\partial B} D\Gamma_0(t, t_0; x - x_0)\, dS_x - \int_{\partial B} D\Gamma_0(t, t_0; y_0 - x)\, dS_x \right] dt$$

$$\le d_\rho^{-2} M_{2,\alpha}^{t_0}[f] \int_{t_0-d^2}^{t_0} \left[\int_{\partial B} D^2\Gamma_0\left(t, t_0; x - x^*\right) |x_0 - y_0|\, dS_x \right] dt$$

$$\le k d_\rho^{-2} M_{2,\alpha}^{t_0}[f] \int_{t_0-d^2}^{t_0} (t_0 - t)^{-\frac{n+2}{2}} \int_{\partial B} e^{-k\frac{|x-x_0^*|^2}{t_0-t}} dS_x \, |x_0 - y_0|\, dt$$

$$\le k d_\rho^{-2} M_{2,\alpha}^{t_0}[f] \int_{t_0-d^2}^{t_0} (t_0 - t)^{-\frac{n+2}{2}} e^{-k\frac{d^2}{t_0-t}} \int_{\partial B} dS_x \, |x_0 - y_0|\, dt$$

$$\le k d_\rho^{-2} M_{2,\alpha}^{t_0}[f] \frac{|x_0 - y_0|}{d} \qquad (30)$$

$$|W_{23}| \le d_\rho^{-2} \frac{|x_0 - y_0|}{d} M_{2,0}^{t_0}[f] \int_{t_0-d^2}^{t_0} \left| D_x \left(-\int_B D\Gamma_0(t, t_0; x - x_0)\, dx \right) \right| dt$$

$$\le d_\rho^{-2} \frac{|x_0 - y_0|}{d} M_{2,0}^{t_0}[f] \int_{t_0-d^2}^{t_0} \int_{\partial B} \left| D\Gamma_0(t, t_0; x - x_0) \right| dS_x \, dt$$

$$\le k d_\rho^{-2} \frac{|x_0 - y_0|}{d} M_{2,0}^{t_0}[f] \int_{t_0-d^2}^{t_0} (t - t_0)^{-\frac{n+1}{2}} \int_{\partial B} e^{-k\frac{|x-x_0|^2}{t_0-t}} dS_x \, dt$$

$$\le k d_\rho^{-2} \frac{|x_0 - y_0|}{d} M_{2,0}^{t_0}[f] \int_{t_0-d^2}^{t_0} (t - t_0)^{-\frac{n+1}{2}} e^{-k\frac{d^2}{t_0-t}} \int_{\partial B} dS_x \, dt$$

$$\le k d_\rho^{-2} \frac{|x_0 - y_0|}{d} M_{2,0}^{t_0}[f] d^{n-1} \int_{t_0-d^2}^{t_0} (t-t_0)^{-\frac{n+1}{2}} e^{-k\frac{d}{t_0-t}} dt$$

$$\le k d_\rho^{-2} \frac{|x_0 - y_0|}{d} M_{2,0}^{t_0}[f] d^{n-1} \int_1^\infty d^{-n-1} z^{\frac{n+1}{2}} e^{-kz} d^2 z^{-2} dz$$

$$\le k d_\rho^{-2} \frac{|x_0 - y_0|}{d} M_{2,0}^{t_0}[f] \quad (31)$$

De (28), (29), (30) y (31) se obtiene:

$$|I_2(P) - I_2(Q)| \le k \frac{d_{PQ}^{-2}}{d_{PQ}^{\alpha(d_{PQ})}} M_{2,\alpha(r)}^{t_0}[f] (|x_0 - y_0|)^{\alpha(|x_0-y_0|)} + k d_\rho^{-2} M_{2,0}^{t_0}[f] \frac{|x_0 - y_0|}{d} \quad (32)$$

$$|I_3(P) - I_3(Q)| \le \left| \int_{t_0-d^2}^{t_0} \int_B u(t,x) \{ (D_x + D_t) [\varphi(t,x) D_\zeta^2 \Gamma_0(t,t_0,x-x_0)] \} dx\, dt - \right.$$

$$\left. - \int_{t_0-d^2}^{t_0} \int_B u(t,x) \{ (D_x + D_t) [\varphi(t,x) D_\zeta^2 \Gamma_0(t,t_0,x-y_0)] \} dx\, dt \right|$$

$$\le \left| \int_{t_0-d^2}^{t_0} \int_B u(t,x) \{ (D_x + D_t) [\varphi(t,x) (D_\zeta^2 \Gamma_0(t,t_0,x-x_0) - D_\zeta^2 \Gamma_0(t,t_0,x-y_0))] \} dx\, dt \right|$$

$$\le k M_{2,0}^{t_0}[u] \int_{t_0-d^2}^{t_0} \int_B \left[d^{-2}(t_0-t)^{-\frac{n+3}{2}} + d^{-1}(t_0-t)^{-\frac{n+4}{2}} + d^{-1}(t_0-t)^{-\frac{n+3}{2}} \right] e^{-k\frac{|x-x^*|^2}{t_0-t}} |x_0 - y_0| \, dx\, dt$$

Referencias bibliográficas

Castellanos, C “Estimaciones de Schauder en normas anisótropas de Hölder para soluciones

generalizadas de ecuaciones parabólicas de segundo orden en forma divergente”. Tesis de

Maestría, ISP EJV, Ciudad de la Habana, 2003.

Che, J.; et al “Estimaciones de Schauder de soluciones generalizadas de ecuaciones elípticas

en forma divergentes” (Ponencia) IV Simposium Acerca del Desarrollo de la Matemática.

CITMA.1997.

Che, J.; et al “Estimaciones de Schauder de soluciones generalizadas de ecuaciones elípticas

en forma divergentes” Rev. Orbita Científica Electrónica, ISPEJV, Ciudad de la Habana, 2000.

Che, J; López, M. “Estimaciones interiores en normas anisótropas generales de

Hölder para soluciones de ecuaciones parabólicas de segundo orden” . Rev.

Ciencias Matemáticas, UH, Vol XI, 1990.

Eidel'man, S.D. Parabolic Sistems. North-Holland Publishing Company, London, 1969

Friedman, A. Partial differential equations of parabolic type. Prentice-Hall, Inc.1964

Ivanovich,M.D. “Estimaciones de soluciones del problema general de contorno para ecuaciones elípticas de orden superior en espacios Cl+_®” . (en ruso), DAN, URSS, 1967, tom 175, No.5.

López, M. “Estimaciones interiores para soluciones de ecuaciones parabólicas lineales”

Reporte de Investigación. ACC, Ciudad de la Habana, 1986.

Ladizhenskaia, D.A.; Solonniko V.A.;Ural'tzeva H.N. “Ecuaciones lineales y no lineales de tipo

parabólico” (en ruso) Edit. Nauka, Moscú, 1967

Ribas E. “Nuevas estimaciones para soluciones clásicas de la ecuación de la conducción del calor” Tesis de Maestría, ISP EJV, Ciudad de La Habana, 2003.

Rivero, I. “Estimaciones de Schauder de soluciones generalizadas de ecuaciones elípticas en

forma divergentes” (Tesis de Maestría), ISP EJV, Ciudad de la Habana, 1997
Tijonov A.N.; Samarsky A.A “Ecuaciones de la Física Matemática”. Editorial Mir. Moscú. 1980.