

Secuencia didáctica para favorecer el proceso de enseñanza-aprendizaje de las curvas de segundo grado

Didactic sequence to promote the teaching-learning process of second-degree curves

Lic. Thalia Ruíz Mulet. Licenciada en Educación Matemática, Escuela Militar Camilo Cienfuegos, Holguín, Cuba.

Correo: ruizmuletthalia39@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-5177-0257>

Dr. C. Nolbert González Hernández. Doctor en Ciencias de la Educación, Universidad de Holguín, Cuba.

Correo: nolbertreblon@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9579-1073>

Lic. Angel Reyes González. Licenciado en Medicina, Universidad de Ciencias Médicas de Holguín, Cuba.

Correo: angelreyes1991@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9844-8839>

Recibido: 19 de enero de 2024

Aprobado: 27 de mayo de 2024

Resumen

El objetivo de la investigación es elaborar una secuencia didáctica para desarrollar el proceso de enseñanza aprendizaje de las curvas de segundo grado que se desarrolla en la escuela Militar Camilo Cienfuegos de Holguín. Para cumplir con este objetivo, se realiza una revisión bibliográfica que permitió fundamentar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática y elaborar la secuencia didáctica. En el desarrollo de la misma, se constata mediante entrevista, talleres de reflexión y encuestas que es viable el empleo del GeoGebra para impartir este contenido.

Palabras clave: GeoGebra, Secuencia Didáctica, Sistemas de representación

Abstract

The objective of the research is to develop a didactic sequence to develop the teaching-learning process of the second-grade curves that takes place at the Camilo Cienfuegos Military School in Holguín. To meet this objective, a bibliographic review was carried out that allowed us to base the teaching-learning process of Mathematics and develop the didactic sequence. In its development, it was confirmed through interviews, reflection workshops and surveys that the use of GeoGebra to teach this content is viable.

Keywords: GeoGebra, Didactic Sequence, Representation Systems

Introducción

El estudio de las curvas de segundo grado es un contenido básico dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Su estudio ha permitido desarrollar aplicaciones ópticas, físicas, informáticas, entre otras (Muñoz, 2015). Las propiedades de estas curvas son la base del diseño y construcción de lentes, espejos, y superficies; componentes esenciales de microscopios, telescopios,



radares, antenas parabólicas, entre otras aplicaciones, que son de importancia en las ciencias de manera general.

En la enseñanza preuniversitaria, su estudio parte en una primera etapa de la obtención de sus ecuaciones partiendo de sus definiciones. Además, se analizan las representaciones gráficas de estas definiciones (Elipse, hipérbola y parábola como lugar geométrico) y se determinan los elementos que las componen. Con este objetivo, en onceno grado, la unidad cinco de su programa de estudio da tratamiento a este contenido. En el desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje de las curvas de segundo grado, se utiliza principalmente el libro de texto básico de la asignatura y en algunos casos se emplean asistentes matemáticos para apoyar este proceso

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de este contenido se utilizan tres sistemas semióticos generalmente para analizar sus definiciones. El lenguaje se utiliza para analizar los rasgos esenciales de las definiciones de estas curvas, el algebraico para representar mediante una fórmula matemática los puntos de un plano que cumplen las condiciones planteadas en las definiciones, y el gráfico para observar los puntos del plano que cumplen determinadas propiedades que son exigidas en cada definición.

El uso de la Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas constituye una línea de investigación que necesita ser fortalecida (Estrada, et al., 2021). En esta dirección, el software GeoGebra es empleado con mayor frecuencia dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. GeoGebra es un software matemático dinámico para todos los niveles educativos que reúne geometría, álgebra, hojas de cálculo, gráficos, estadísticas y cálculo. Además, GeoGebra ofrece una plataforma en línea con recursos gratuitos para el aula. Estos recursos se pueden compartir fácilmente a través de una plataforma de colaboración nombrada “GeoGebra Classroom” donde se puede monitorear el progreso de los estudiantes en tiempo real.

El empleo de este software permite la interpretación de las definiciones de los objetos y relaciones que se expresan de forma coloquial y representarlas en otros sistemas semióticos como el algebraico y el gráfico. Por lo que, estas representaciones en diferentes sistemas semióticos posibilitan que el estudiante comprenda mejor el contenido matemático que se imparte (Gruszycki, et al., 2014). Barahona (2015) y González et al. (2017) afirman que el empleo del GeoGebra ofrece la posibilidad de potenciar el componente visual de la matemática y su empleo contribuye a la apropiación de los conceptos en entornos de aprendizajes interesantes y dinámicos. Dentro de las características que más se destacan en el GeoGebra destacan la representación múltiple y la interactividad. Estas características ofrecen potencialidades educativas si se compara con un sistema de enseñanza tradicional (Gilbert y Gabriel, 2018).

Un enfoque predominantemente algebraico en el desarrollo de este proceso de enseñanza aprendizaje en concreto resulta desfavorable, por lo que se debe emplear de forma equilibrada los tres sistemas semióticos antes descritos (D’Andrea, 2021; González et al., 2022). De esta manera, los estudiantes aprehenden los contenidos de forma eficiente y se promueve la representación de conceptos en diferentes formas (Hitt, 1996). Además, las nuevas tecnologías han impactado en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática a diferentes niveles educacionales (Grisales, 2018; Arancibia, et al., 2020) Además, la existencia de software que constituyen recursos didácticos para la enseñanza de la Matemática en general y de las curvas de segundo grado en particular han permitido desarrollar el proceso de enseñanza-aprendizaje en un entorno dinámico. Por lo que, el objetivo de la presente investigación es elaborar una secuencia didáctica empleado el GeoGebra que favorezca el proceso de enseñanza-aprendizaje de las curvas de segundo grado.



Metodología

Se desarrolló una investigación con enfoque mixto, tipo bibliográfica documental, para conocer el sustento teórico que sirven de fundamento para elaborar una secuencia didáctica. Así como, el nivel de profundidad con el que se imparten los contenidos en los programas de Matemática de niveles precedentes y la determinación de las relaciones de estos con las curvas de segundo grado. En consecuencia, se valora la factibilidad y pertinencia de la secuencia didáctica mediante encuestas y talleres de reflexión con especialistas.

Resultados

Mex (2019) plantea que una secuencia didáctica es un

... conjuntos articulados de actividades de aprendizaje y evaluación que, con la mediación de un docente, buscan el logro de determinadas metas educativas, considerando una serie de recursos. En la práctica, esto implica mejoras sustanciales de los procesos de formación de los estudiantes, ya que la educación se vuelve menos fragmentada y se enfoca en metas. (p. 2)

La Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (2011) aporta elementos a esta investigación respecto a la necesidad de emplear diferentes sistemas semióticos en el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. Por lo tanto, el trabajo de Duval (2011) se emplea en el diseño de la secuencia didáctica que se elabora. Este propio autor resalta que "... los procesos de adquisición de conocimiento matemático son tan complejos que parece ser necesario tener diferentes enfoques" (Duval, 2006, p. 103). Estos enfoques a los que se refiere Duval (2006) son las representaciones que se puede hacer de un objeto matemático empleando diferentes sistemas semióticos.

Por otra parte, en la secuencia didáctica el empleo del GeoGebra asume un importante papel por el carácter dinámico de este software. El mismo, permite utilizar diferentes sistemas de representaciones semióticas. La secuencia didáctica se compone de actividades relacionadas con las curvas de segundo y tienen como objetivo principal que el alumno aprenda los diferentes conceptos asociados a este contenido. Además, para resolver las actividades el alumno debe interactuar con diferentes sistemas de representación, de forma tal que permita integrar los conceptos matemáticos relacionados con las curvas de segundo grado.

La secuencia didáctica elaborada se diseña por etapas como se describe a continuación:

Etapas 1. Diagnóstico de la situación actual

Características de la etapa: Familiarizar a los estudiantes con el software GeoGebra, diagnosticar el estado actual.

Objetivos: sobre la base de familiarizar a los alumnos con el software se debe conocer los conocimientos previos que tienen los estudiantes sobre las curvas de segundo grado y conceptos relacionados. Así como, detectar las dificultades que los alumnos tienen en la interpretación de estos conceptos y con los registros de representaciones semióticas.

Acciones a realizar por los docentes: el diagnóstico del grado de preparación de los estudiantes respecto al dominio de las tecnologías, y a los contenidos previos relacionados con las curvas de segundo grado.

Acciones a realizar por los estudiantes: interactuar con el software mediante la manipulación de recursos sencillos para analizar conceptos relacionados con las tareas que se desarrollan.

Etapas 2: Resolución de tareas docente utilizando un recurso en GeoGebra creado anteriormente por el profesor.



Características de la etapa: se solicita que el estudiante resuelva una tarea docente que involucra los conceptos a estudiar. Ello implica que identifique datos, incógnitas y relaciones entre estos. Se propicia que el estudiante trabaje en la conversión de diferentes registros de representación semiótica. El papel del recurso construido por el profesor en esta etapa es apoyar el proceso de solución y la conversión de registros.

Acciones a realizar por los docentes: crear recursos didácticos en GeoGebra que permita vincular a los estudiantes con las tareas que se resuelven en esta etapa.

Acciones a realizar por los estudiantes: interactuar con los recursos didácticos e identificar su utilidad en la resolución de las tareas propuestas.

Etapa 3: Resolución de una tarea docente utilizando un recurso creado por el estudiante.

Características de la etapa: se solicita al estudiante resolver un problema que involucra crear un recurso para analizar diferentes conceptos relacionados con las curvas de segundo grado, El estudio de estos conceptos requiere que el estudiante identifique datos, incógnitas y las relaciones entre estos, con el fin de solucionar la tarea que se propone.

Acciones a realizar por los docentes: en esta etapa prima la acción de brindar niveles de ayuda a los estudiantes con el objetivo de que se logre crear un recurso didáctico que permita resolver las tareas propuestas.

Acciones a realizar por los estudiantes: crear recursos didácticos e implementarlos en la resolución de las tareas propuestas.

Etapa 4: Valorar y evaluación de los conocimientos adquiridos. Características de la etapa: evaluar los conocimientos adquiridos por los estudiantes sobre las curvas de segundo grado y determinar el cumplimiento de los objetivos de aprendizaje establecidos para cada actividad.

Acciones a realizar por los docentes: evaluar los conocimientos adquiridos por los estudiantes respecto a las curvas de segundo grado.

Acciones a realizar por los estudiantes: valorar los recursos didácticos creados de forma particular por los estudiantes en el colectivo y su implementación en la resolución de las tareas concretas propuestas.

En el desarrollo de la secuencia didáctica propuesta se puede emplear las siguientes tareas docentes u otras similares elaboradas por los docentes:

1. Utilizando GeoGebra, grafique la circunferencia que tiene como extremos de un diámetro los puntos: $A(-1; 10)$ y $B(5; 2)$.

1.1 Observe la ecuación de la circunferencia que aparece en el software después de haber construido la circunferencia. ¿Cómo se obtiene esta ecuación?

1.2Cuál es el área de la circunferencia. Calcúlela utilizando las herramientas incorporadas en GeoGebra.

I. Ubique un punto A y B en las coordenadas cartesianas que plantea el ejercicio.

II. Trace el segmento \overline{AB} .

III. Encuentre el punto medio del segmento AB (punto C).

IV. Grafique la circunferencia de centro C y de radio CB o CA .



2. Halle la ecuación de la circunferencia concéntrica a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 = 0$ que sea tangente a la recta $3x - 4y + 7 = 0$.

I. Cuál es el procedimiento para determinar el centro de esta circunferencia.

II. Grafique la recta $3x - 4y + 7 = 0$ empleando el GeoGebra.

III. ¿Cómo calcular el radio de una circunferencia que sea tangente a $3x - 4y + 7 = 0$?

IV. Grafique esta distancia empleado las herramientas disponibles en GeoGebra.

V. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia concéntrica a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 = 0$ y tangente a la recta $3x - 4y + 7 = 0$? Grafique en GeoGebra.

3. Utilizando el software GeoGebra, cree un recurso didáctico para analizar la definición de una circunferencia. A partir de los principales elementos que la caracterizan.

I. Cree deslizadores h , k y r .

II. Escriba la ecuación general de la circunferencia de forma algebraica a partir de su definición. Utilizando los deslizadores h , k y r , creados anteriormente.

III. Ubique dos puntos O y P_1 , donde $\overline{O_1P_1}$ sea el radio de la circunferencia y trace el segmento $\overline{O_1P_1}$.

IV. Calcule la longitud de $\overline{O_1P_1}$ utilizando GeoGebra, mueva el punto P_1 y analice que pasa con la longitud de $\overline{O_1P_1}$.

4. Utilizando el software GeoGebra, halle la ecuación de la elipse con el eje mayor paralelo al eje x , sabiendo que $2a = 10$, $2c = 8$ y el centro es $O(-1; 0)$.

I. Ubicar el centro de la elipse en el GeoGebra.

II. Hallar cuál es el semieje principal despejando a y representar los puntos A_1 y A_2 .

III. Hallar cuál es la distancia focal despejando c y representar los puntos F_1 y F_2 .

IV. Representar en el sistema de coordenadas cartesianas en GeoGebra la elipse determinada por estas propiedades.

V. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos B_1 y B_2 donde $\overline{B_1B_2}$ es el semieje no principal de la elipse?

VI. ¿Cuál es la ecuación que representa a esta elipse?

5. Utilizando el software GeoGebra, cree un recurso didáctico para analizar la definición de una elipse con su eje mayor paralelo al eje de las abscisas. A partir de los principales elementos que la caracterizan.

I. Cree deslizadores a , b , h y k .



II. Escriba la ecuación general de la elipse de forma algebraica a partir de su definición. Utilizando los deslizadores a, b, h y k , creados anteriormente.

III. Ubique dos puntos A_1 y A_2 donde $\overline{A_1A_2}$ sea el eje principal de la elipse.

IV. Ubique un punto P cualquiera en la elipse.

V. Ubique dos puntos F_1 y F_2 tal que $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = \overline{A_1A_2}$.

6. Desde el punto $(0; 9)$ se traza una recta tangente a la elipse $2x^2 + y^2 = 9$.

Halle el intercepto de esta recta tangente con la parte positiva del eje de las abscisas.

7. Utilizando el software GeoGebra, cree un recurso didáctico para analizar la definición de parábola como lugar geométrico. A partir de los principales elementos que la caracterizan.

I. Cree deslizadores h , k y p .

II. Escriba la ecuación general de la parábola de forma algebraica a partir de su definición. Utilizando los deslizadores h , k y p , creados anteriormente.

III. Ubique un punto F , donde F sea el foco de la parábola, además ubique un punto cualquiera P_1 que pertenezca a la parábola.

IV. Escriba una la ecuación de la directriz de la parábola empleado los parámetros h , k y p .

V. Calcule la longitud de $\overline{FP_1}$ y la distancia que existe desde P_1 hasta la directriz.

8. Sea $P : y^2 = 8x$ la ecuación de una parábola, halle la ecuación de la recta tangente a P y paralela a la recta $2x + 2y - 3 = 0$.

9. Determine si la ecuación $-y^2 + 12x + 10y - 61 = 0$ representa una circunferencia, una elipse, una parábola o una hipérbola. Grafique la curva de segundo grado que representa esta ecuación.

10. Utilizando el software GeoGebra, cree un recurso didáctico para analizar la definición de hipérbola, a partir de los principales elementos que la caracterizan.

I. Cree deslizadores h, k, a y b .

II. Utilizando los deslizadores h, k, a y b creados anteriormente. Escriba la ecuación general de una hipérbola de forma algebraica a partir de su definición, de manera que su eje principal sea paralelo al eje de las ordenadas.

III. Ubique un punto F_1 y F_2 , donde estos puntos sean los focos de la hipérbola. Utilice los parámetros h, k, a y b .



- IV. Ubique dos puntos A_1 y A_2 donde $\overline{A_1A_2}$ sea el eje principal de la hipérbola.
- V. Ubique un punto P_1 en una rama de la hipérbola y un punto P_2 en la otra rama de la hipérbola.
- VI. Trace los segmentos $\overline{P_1F_1}$, $\overline{P_1F_2}$, $\overline{P_2F_1}$ y $\overline{P_2F_2}$ y compare las distancias $\overline{P_1F_1} - \overline{P_1F_2}$ y $\overline{P_2F_1} - \overline{P_2F_2}$ con la distancia $\overline{A_1A_2}$.
11. Utilizando GeoGebra, represente la ecuación de la hipérbola con eje mayor paralelo al de las abscisas sabiendo que $2a = 6$, $2c = 10$ y el centro está en el punto $O(-2; 0)$.
- I. Represente el punto O en Geogebra
- II. Represente los puntos A_1 y A_2 donde $\overline{A_1A_2}$ es la longitud del eje principal.
- III. Represente los puntos F_1 y F_2 donde $\overline{F_1F_2}$ es la distancia focal.
- IV. Utiliza la herramienta de GeoGebra para graficar hipérbolas teniendo los dos focos y un punto ella.
12. Los focos de una elipse $9y^2 + 25x^2 - 225 = 0$ coinciden con los focos de una hipérbola. Si la excentricidad de la hipérbola es $4/3$, determine su ecuación.
13. Calcule el área de la región triangular limitada por las asíntotas de la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$ y la recta $9x + 2y - 24 = 0$.

Discusión

Ante la imposibilidad práctica de realizar una constatación experimental u otra forma de aplicación parcial de resultados, se realizan entrevistas y talleres de intercambio con especialistas con el objetivo de obtener valoraciones objetivas respecto a la secuencia didáctica que se propone. Por lo que, se considera la importancia de las fuentes de argumentación basadas en la experiencia y formación teórica de los especialistas, con este propósito, se entrevistaron y se intercambiaron ideas y experiencias con doce (12) especialistas de experiencia.

La categoría que indica Muy Apropiado recibió un total en porcentaje de 94,87%, la categoría siguiente Bastante Apropiado recibió un 2,56% y la de Apropiado un 2,56%. En las otras categorías no se cuantificaron respuestas, por lo que se asume que la propuesta fue aceptada. Además, en los talleres de reflexión se obtuvieron sugerencias y observaciones que se plantean a continuación: fácil de asumir por lo que se puede transferir a otras unidades; este tipo de tareas debe incluirse en el programa del diplomado que se desarrolla para profesores noveles de Matemática; me parece positivo, se debe incluir más tareas docentes demostrativas, que se oriente como material de estudio en el desarrollo de las preparaciones metodológicas colectivas.

Los autores manifiestan su acuerdo con los criterios y sugerencias dadas y presenta este informe para considerar futuras aplicaciones. Además, se considera que la propuesta está sustentada en la materialización



del cumplimiento de un sistema de objetivos derivados a partir del fin de la Educación Preuniversitaria. Por lo que, responde a necesidades sociales y educativas actuales.

Referencias Bibliográficas

- Arancibia, M., Cabero, J., & Marín, V. (2020). Creencias sobre la enseñanza y uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) en docentes de Educación superior. *Formación universitaria*, 13(3), pp. 89-100. <https://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062020000300089>
- Barahona, F., Barrera, O., Vaca, B., & Hidalgo, B. (2015). GeoGebra para la enseñanza de la matemática y su incidencia en el rendimiento académico estudiantil. *Revista Tecnológica - ESPOL*, 28(5). <http://www.rte.espol.edu.ec/index.php/tecnologica/article/view/429>
- D'Andrea, R. (2021). La visualización como eje central en la enseñanza de la matemática en tiempos de pandemia. *ReTyCA*, 6(1), pp. 7-12. <http://funes.uniandes.edu.co/24263/>
- Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.
- Duval, R. (2011). Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. <https://www.readcube.com/articles/10.5212%2Fpraxeduc.v.7i2.0014>
- Estrada, M., Nápoles, J. & Rojas, O. (2021). El uso de la opción 3D del GeoGebra en la disciplina de Geometría Analítica en la formación de profesores. *Rematec*, 16(38), pp. 120-137. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n38.p120-137.id341>
- Gibert.E., & Gabriel, C. (2018). Potencialidades del asistente matemático Geogebra para fomentar la significatividad y la motivación en el aprendizaje de la matemática. *Órbita Científica*, 23(97). <http://revistas.ucpejv.edu.cu/index.php/rOrb/article/view/498>
- González, M., Matilla, J. y Rosales, R. (2017). Potencialidades del software Geogebra en la enseñanza de la matemática. *Revista Científico - Educaciones de la provincia de Granma*, 13(24), pp. 401-415. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6759725>
- González, N., Cruz, M., & Garcés, W. (2022). Empleo de la visualización matemática en el cálculo de volúmenes de sólidos en revolución. *Órbita Científica*, 28(120). <http://revistas.ucpejv.edu.cu/index.php/rOrb/article/view/1619>
- Grisales, A. (2018). Uso de recursos TIC en la enseñanza de las matemáticas: retos y perspectivas. *Entramado*, 14(2), pp. 198-214. <http://doi.org/10.18041/1900-3803/entramado.2.4751>
- Gruszycki, A., Oteiza, L., Maras, P., Gruszycki, L., Ballés, H. (2014). Geogebra y los sistemas de representación semióticos. En Lestón, Patricia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 2169-2176). <http://funes.uniandes.edu.co/6186/>
- Hitt F. (1996). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. En F. Hitt (Ed.). *Investigaciones en Educación Matemática*, 1, pp. 245-264.
- Mex, N. (2019). Secuencia didáctica del Proyecto de Recomendaciones Literarias. En *Planeación didáctica y evaluación socioformativa para contextos vulnerables desde la socioformación*. <https://www.researchgate.net/profile/Nicte-Mex->



Muñoz, A. (2015). Curvas cónicas desde su origen hasta sus aplicaciones en la actualidad. Tesis de maestría. <https://redined.educacion.gob.es/xmlui/handle/11162/174006>

Declaración de conflicto de interés y conflictos éticos

Los autores declaramos que este manuscrito es original, no contiene elementos clasificados ni restringidos para su divulgación ni para la institución en la que se realizó y no han sido publicados con anterioridad, ni están siendo sometidos a la valoración de otra editorial.

Los autores somos responsables del contenido recogido en el artículo y en él no existen plagios, conflictos de interés ni éticos.

Contribuciones de los autores

Lic. Thalia Ruíz Mulet: redacción del artículo, fundamentos teóricos.

Dr. C. Nolbert González Hernández: diseño del artículo, fundamentos teóricos metodológicos, revisión de todo el contenido.

Lic. Angel Reyes González: tratamiento informático.



