

Desarrollo del pensamiento algebraico temprano mediante generalización de patrones

Development of thinking early algebraic by pattern generalization

Ms.c Sara Vilma Rodríguez de Chicas. Profesora de la Universidad de El Salvador (UES), Facultad Multidisciplinaria de Occidente; Coordinadora de la Academia Sabatina Santa Ana, del Programa Jóvenes Talento de Matemática y Ciencias Naturales. Máster en Métodos y Técnicas de Investigación Social; Licenciada en Matemática

Correo: sara.rodriguez@ues.edu.sv; sara.rodriguez@jovenestalento.edu.sv

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4833-9145>

Dr.C José Ron Galindo. Vicerrector de pregrado y Profesor del departamento de Matemática y Física de la Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona; Máster en Metodología de la Investigación y licenciado en Educación especialidad Matemática

Correo: joserj@ucpejv.edu.cu; joserongalindo@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6640-6482>

Recibido: octubre de 2021

Aprobado: marzo de 2022

Resumen

El presente trabajo resume las principales ideas del desarrollo del pensamiento algebraico temprano; mediante el método analítico sintético se abordan criterios de científicos que investigan el tema. Petrovsky aporta una perspectiva del pensamiento desde la psicología y lo clasifica en efectivo, figurativo y abstracto, además, lo caracteriza mediante las cualidades de independencia, flexibilidad y rapidez. Radford particulariza sobre el pensamiento algebraico y lo clasifica en tres estratos: El pensamiento algebraico factual, el contextual y el simbólico y lo caracteriza a través de los vectores: el sentido de indeterminancia¹, la analiticidad y la designación simbólica. Los resultados indican que Vergel (2015) y otros investigadores coinciden que la generalización de patrones es una vía de acceso al desarrollo del pensamiento algebraico, porque el proceso implica mucha elaboración en el cerebro del estudiante, cuando busca regularidad o comunalidad en los términos del patrón.

Palabras clave: Pensamiento algebraico, generalización, patrones algebraicos, álgebra temprana, primaria.

Abstract

The present work summarizes the main ideas of the development of early algebraic thinking; through the synthetic analytical method, criteria of scientists who investigate the subject are addressed. Petrovsky provides a thinking perspective from psychology and classifies it as effective, figurative and abstract, in addition, he characterizes it through the qualities of independence, flexibility and speed. Radford particularizes about algebraic thinking and classifies it in three layers: The factual algebraic, the contextual and the symbolic thinking and characterizes it through the vectors: the sense of indeterminacy², analyticity and symbolic designation. The results indicate that Vergel (2015) and other researchers agree that the generalization of patterns is an access route to the development of algebraic thinking, because the process involves a lot of elaboration in the student's brain, when looking for regularity or communality in the terms of the pattern.

Keywords: Algebraic thinking, generalization, algebraics patterns, early algebraic, elemental.

¹ Vergel (2016) enfatiza el sentido de indeterminancia creador por Radford (2010) "refiere a una sensación de indeterminación que es propio de los objetos algebraicos básicos como incógnitas, variables y parámetros" (p.73)

²Vergel (2016) emphasizes the sense of indeterminacy created by Radford (2010) "refers to a feeling of indeterminacy that is typical of basic algebraic objects such as unknowns, variables and parameters" (p.73)



Introducción

El Álgebra es una de las ramas de la matemática más difíciles de aprender, la utilización de símbolos para representar cantidades numéricas le da cierto nivel de abstracción. La mayoría de los estudiantes llega a la educación superior con insuficientes habilidades algebraicas, lo que les impide enfrentar con naturalidad las exigencias de esta disciplina.

Los estudiantes con insuficientes habilidades algebraicas tienen limitaciones en la comprensión y aplicación de las leyes que rigen este campo. Se les debe potenciar una visión diferente del tratamiento de toda la simbología algebraica, cultivarles un nuevo modo de pensar y enfrentarles a tareas que contribuyan al desarrollo del pensamiento algebraico.

Los expertos Butto & Rojano (2010); Radford (2010); Aké, Godino & Castro (2015); Vergel (2016); Callejo (2016) y Aké (2017), investigaron formas de desarrollar el pensamiento algebraico temprano en estudiantes de primaria, porque creen que es necesario iniciar desde estos niveles el fomento de habilidades de generalización, desarrollo de la intuición, adopción de representaciones convencionales, desarrollo del pensamiento variacional, etc.

En algunas investigaciones se estudió el desarrollo del pensamiento algebraico mediante el razonamiento proporcional, en otras mediante el uso de algeblocks, sin embargo, la mayoría se han enfocado en la generalización de patrones, considerados el corazón del álgebra (Vergel, 2016). La autora decidió reflexionar sobre el desarrollo del pensamiento algebraico temprano mediante la generalización de patrones, porque en la actualidad, es la línea de investigación más robusta en este campo y tiene interés en continuar la exploración con estudiantes de secundaria³ que es un nivel poco explorado, pero no menos importante.

El objetivo de este trabajo es explicar la manera de desarrollar el pensamiento algebraico utilizando el proceso de generalización de patrones, tomando como fundamento las investigaciones de los autores ya mencionados. Además, evidenciar la necesidad de seguir investigando sobre la manera de llevar al estudiante al nivel superior de desarrollo de pensamiento algebraico.

Los autores sobre los cuales se fundamenta este trabajo fueron elegidos por su trayectoria como investigadores en el campo algebraico y sus numerosas publicaciones. Radford, pionero en investigaciones sobre desarrollo del pensamiento algebraico, sus teorías han sido consideradas por Vergel, Callejo, Aké entre otros. Se incluyen siete fuentes secundarias internacionales y de actualidad, sólo una de 1986 (Petrovski) por su importante aporte sobre el pensamiento.

Se inicia con la definición y caracterización del pensamiento. Posteriormente, se define el pensamiento algebraico, su caracterización mediante tres vectores y su división en tres estratos. Un tercer apartado explica el desarrollo del pensamiento algebraico en la escuela primaria, enfatizando la generalización de patrones por su influencia en el desarrollo de este pensamiento.

Desarrollo

Pensamiento: Definición y caracterización

Desde la perspectiva psicológica, pensamiento “es el proceso psíquico socialmente condicionado de búsquedas y descubrimientos de lo esencialmente nuevo y está indisolublemente ligado al lenguaje” (Petrovski, 1986, p.22). Para Vergel (2016) “es una actividad reflexiva y sensible mediada por signos, materializada en la corporeidad de las acciones, gestos y artefactos” (p.57). La autora de este trabajo cree que estos escritores conciben el pensamiento en un movimiento dialéctico de la realidad histórica cultural y un individuo que responde de acuerdo con sus propias interpretaciones.

El ser humano constantemente se enfrenta a situaciones desconocidas, incomprensibles e inesperadas, lo que significa que los conocimientos que posee son limitados y que, por lo tanto, se necesita de un conocimiento más profundo del mundo que le rodea. El pensamiento se aproxima a estas profundidades de

³En El Salvador la educación secundaria corresponde al Tercer Ciclo de Educación Básica



lo ilimitado y lo nuevo, por lo que cada sujeto, al pensar, descubre algo nuevo por muy pequeño y limitado que esto sea y, aunque lo nuevo no sea para la humanidad, sino solo para él.

El pensamiento es el reflejo activo del mundo objetivo en conceptos, juicios, teorías, etc. porque está ligado al mundo exterior y constituye su imagen refleja la cual se comprueba constantemente en la práctica, sin embargo, no se llega a un pleno conocimiento ulterior del mundo exterior. Es a través del pensamiento que se logra dividir y desenredar las complejísimas interdependencias existentes entre los objetos, fenómenos, acontecimientos, entre otros, el resultado observado exteriormente es la consecuencia regular del proceso interno del pensamiento del estudiante.

Ese resultado observable puede ser que: “el alumno resolvió o no resolvió la tarea, le surgieron o no proyectos, planes de solución, “conjeturas”, asimiló o no determinados conocimientos, métodos de acción, se formó o no un nuevo concepto, etc.” (Petrovski, 1986, p.301). La psicología tiene interés en descubrir el proceso interno racional que los produce.

Por su parte, Petrovski (1986) explica que en la actividad cognoscitiva real de cada persona existe una interrelación del conocimiento sensorial y el pensamiento, de tal forma que cuando el conocimiento sensorial se hace insuficiente, comienza el pensamiento y desarrolla el trabajo cognoscitivo de las sensaciones, percepciones y representaciones hasta un nivel elevado; en esta interconexión se adhiere el lenguaje, ya que este hace posible la abstracción de propiedades del objeto de conocimiento.

El pensamiento surge y se desarrolla en conexión indivisible con el lenguaje, existe una relación directa de la realización de una tarea y la palabra discursiva; el pensar en voz alta hace posible la confrontación clara y correcta de todas las ideas fundamentales que surgen en el proceso del pensamiento. Este inicia a partir de la necesidad de resolver un problema ya que exige pensamiento para su solución, considerando que para ello se necesita un proceso de búsqueda y conocimiento de lo nuevo. En los casos en que el estudiante opera con métodos antiguos, ya conocidos, no se le propicia una situación problemática y, por lo tanto, el razonar o pensar pierde su rol, no cualquier situación de aprendizaje produce pensamiento. Este se manifiesta sólo cuando el estudiante busca por sí mismo la solución.

Las leyes del análisis, la síntesis y la generalización son específicas del pensamiento y sólo sobre la base de estas pueden explicarse todas las manifestaciones exteriores de la actividad racional. El pensamiento es dividido en partes y la unificación, la correlación, la interrelación de esas partes es la síntesis la cual se interrelaciona con el análisis. Este se desarrolla enfrentando al estudiante ante la necesidad de resolver un problema o confrontándolo con la metodología de las indicaciones.

Si se está ante la necesidad de resolver un problema, el estudiante debe buscar algo nuevo, es decir, la solución, sin embargo si se confronta con la metodología de las indicaciones este recibe una indicación en forma de ayuda, pero será capaz de recibir tal ayuda solo cuando por sí mismo se ha acercado a la solución del problema, pues en este momento podrá incorporar la indicación a su sistema de conexiones y relaciones correspondientes en calidad de respuesta parcial, caso contrario no comprenderá la indicación. Otra forma de desarrollar el pensamiento es mediante la formulación de problemas, es decir cuando el estudiante inventa uno nuevo o reformula a partir de uno ya existente, esta actividad exige un esfuerzo mental.

Desde la psicología (Petrovski, 1986) se ha clasificado el pensamiento en efectivo, figurativo y abstracto. El primero es el que nace a partir de la actividad práctica y es el primer tipo de pensamiento que desarrollan los seres humanos. Se verifica tanto en el desarrollo histórico de la humanidad como en el proceso de desarrollo psíquico de cada niño, sobre la base de los conocimientos de la actividad práctica surge, paulatinamente, la actividad racional teórica.

El pensamiento figurativo es el que se produce con base a imágenes, el objeto se percibe y se representa claramente y se dominan los conceptos (en el sentido estricto). Este se da con mayor énfasis en los párvulos (4-7 años). Los expertos sugieren que no es recomendable saturar al estudiante por mucho tiempo con detalles a manera de imágenes, pues es necesario trascender al pensamiento abstracto. Este último se produce sobre la base de la experiencia práctica y sensorial y se expresa en forma de conceptos y razonamientos abstractos, surge desde la edad escolar en la cual se enseña al estudiante un sistema de conceptos con los que comienza a operar.

En fin, la autora considera que, entre estos tipos de pensamiento, se mantiene un vínculo indisoluble; el hecho de desarrollar en el estudiante el pensamiento abstracto durante el proceso de asimilación de conceptos, no significa que el efectivo y figurativo dejen de desarrollarse, siempre hay un perfeccionamiento constante en mayor o menor grado como apoyo a la actividad intelectual.

Por otro lado, Petrovski (1986) caracteriza el pensamiento mediante las cualidades de independencia, flexibilidad y rapidez. La primera tiene que ver con su carácter creador y se manifiesta en la capacidad de plantear y resolver una nueva tarea o un nuevo problema. La flexibilidad es la capacidad de cambiar un camino que se haya tomado para resolver un problema por otro que al principio era imposible considerar, y la rapidez tiene que ver con la capacidad de tomar decisiones en un tiempo muy limitado.

La característica más importante del pensamiento es la capacidad de identificar lo esencial, es decir, profundizar en la esencia del fenómeno en cuestión y descubrir la ley general de desarrollo de fenómenos más o menos homólogos no importando que tan grandes sean sus diferencias exteriores, esto permite llegar a nuevas generalizaciones.

El pensamiento algebraico: caracterización y definición

El pensamiento algebraico según Radford (2010), es una forma particular de reflexionar en la matemática y es considerada una práctica cognitiva mediada por signos. Este autor considera que la naturaleza del pensamiento algebraico emerge en los estudiantes como una forma específica en la cual ellos actúan conceptualmente, con el propósito de llevar a cabo acciones requeridas para la generalización de tareas.

Para Vergel (2016), el pensamiento algebraico es “un conjunto de procesos corporizados de acción y de reflexión constituidos histórica y culturalmente” (p.73). Asume esta definición en el marco de una investigación sobre el desarrollo de pensamiento algebraico con estudiantes de primaria, en la cual su tesis principal fue el desarrollo de este pensamiento a través de los medios semióticos culturales.

De acuerdo con Radford (2010), el pensamiento algebraico se caracteriza por tres vectores: el sentido de indeterminancia⁴, la analiticidad y la designación simbólica. El primero se refiere a la interpretación que se les da a las incógnitas, es decir lo opuesto a la determinancia numérica. Es un carácter indeterminado de las variables que a la vez hace posible la sustitución de un objeto variable o desconocido por otro.

La analiticidad tiene que ver con el reconocimiento del carácter operatorio de los conceptos básicos, es decir la forma de trabajar los objetos indeterminados o las variables. El tercer vector que es la designación simbólica, también llamada expresión semiótica, se relaciona con la manera específica o nombrar a los objetos. Estas tres componentes están estrechamente relacionadas. También Radford (2010) divide el pensamiento algebraico en tres estratos: El pensamiento algebraico factual, el contextual y el simbólico.

El pensamiento algebraico factual es el que se desarrolla mediante medios semióticos de objetivación como los gestos, los movimientos, el ritmo, la actividad perceptual y la palabra discursiva. En este estrato la indeterminancia no avanza hacia el nivel de la enunciación, solo queda implícita, es decir no se usan variables. Por ejemplo, el estudiante señala con la mirada o con su índice, mueve su lápiz, dice “aquí”, “allí”. Este estrato se puede homologar con el pensamiento efectivo de Petrovski (1986) que se refiere a la actividad práctica. En ambos casos es el nivel más elemental de formas de pensamiento y por lo tanto el primero en desarrollarse.

El pensamiento algebraico contextual es el que se desarrolla a través de frases claves o formas reducidas de expresión llamadas contracción semiótica⁵, porque hay evolución de los nodos semióticos tendientes a formular una expresión que sustituya a los gestos. En este estrato la indeterminancia está explícita y es objeto del discurso, lo que significa que aparecen variables, algunos operadores, las frases discursivas del

⁴ Vergel (2016) enfatiza el sentido de indeterminancia creador por Radford (2010) “refiere a una sensación de indeterminación que es propio de los objetos algebraicos básicos como incógnitas, variables y parámetros” (p.73)

⁵ La contracción semiótica se entiende como la evolución de los nodos semióticos. Incluye símbolos en el discurso a manera de reducción tendientes a crear una expresión simbólica o fórmula.



primer estrato se van reduciendo, este estrato está asociado con el pensamiento figurativo de Petrovski (1986) pues se relaciona con imágenes.

El tercer estrato es el pensamiento algebraico simbólico, se representa por símbolos alfanuméricos o fórmulas. Hay un cambio drástico en la forma de nombrar los objetos del discurso, lo que representa un avance en el proceso de objetivación de la contracción semiótica del estrato anterior. El ideal de todo profesor debe ser llevar al estudiante hasta desarrollar esta forma de pensamiento, que desde la psicología se corresponde al pensamiento abstracto.

La autora observa que los aportes de estos dos autores están estrechamente relacionados, en el sentido en que tanto el pensamiento en forma general como el algebraico se desarrollan respetando cierto orden, en ambos se tiene como ideal llegar al nivel más avanzado, es decir, al pensamiento abstracto o algebraico simbólico, sin que esto signifique dejar de desarrollar los dos primeros.

Tanto el enfoque psicológico de Petrovski (1986), como el de Vergel (2016), son asumidos por la autora de este trabajo en su concepción de pensamiento algebraico, ya que afirman que no hay pensamiento sino en lo esencialmente nuevo, en la interacción entre el individuo y su contexto histórico cultural. Esto sucede cuando el estudiante está ante el reto de resolver un problema⁶ que requiere de herramientas no conocidas para él o ante la formulación de nuevas tareas o problemas creados por el mismo; este proceso está mediatizado por el lenguaje.

El campo de los números, las letras y los símbolos pertenece al ámbito algebraico y el lenguaje que opera en él es el simbólico o algebraico. En la interacción con este, el estudiante codifica, que es el paso del natural al simbólico y decodifica que es lo mismo que asignarle significado en el contexto natural a las expresiones simbólicas (del simbólico al natural); en este ir y devenir se enfrenta a lo nuevo en el sentido de las diversas interpretaciones que se les asigna a las variables.

Sobre la base de las ideas expuestas anteriormente, la autora de esta monografía considera que **pensamiento algebraico** consiste en el proceso psíquico mediatizado por la actividad intelectual dirigida hacia la búsqueda y descubrimiento de lo esencialmente nuevo de los objetos que pertenecen al campo de los números, las letras y los símbolos. (Rodríguez, 2020).

Desarrollo del pensamiento algebraico en escolares de primaria

Existe un debate sobre la inclusión de formas de pensamiento algebraico en el currículo de primaria para favorecer la comprensión del álgebra cuando los escolares⁷ lleguen a secundaria, investigaciones en matemática demostraron que “alumnos de escuela primaria pueden, efectivamente, empezar a ser expuestos a los primeros rudimentos de álgebra” (Vergel, 2016, p.15). No significa que se les exponga ante contenidos de álgebra, sino ante actividades que faciliten la transición del pensamiento aritmético al algebraico, mediante una visión diferente del uso de la simbología y las operaciones aritméticas, para cultivar en el niño un nuevo modo de pensamiento aritmético, y a partir de este producir nociones básicas de álgebra temprana (*Early algebra*) que los investigadores llaman desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

Tal discusión se deriva de la necesidad que tiene el estudiante de avanzar del estudio de la aritmética al álgebra, y que en la mayoría de los casos le representa dificultades, Callejo (2016) propone “organizar la enseñanza de la aritmética y del álgebra sin saltos ni rupturas, tratando de que haya una continuidad sin necesidad de introducir nuevos tópicos” (p.6). Lo que significa atribuir carácter algebraico gradual a la actividad matemática, también, Butto & Rojano (2010) explican que no se trata de ver el álgebra como una transición lineal, es decir, como una mera extensión de los cálculos numéricos al cálculo literal y como una herramienta para la manipulación de símbolos, desprovista de significados.

Por ejemplo, se pueden mostrar las tablas de multiplicar con una expresión $y = mx$, donde x e y representen números enteros y m puede ser la tabla del 3. Se pueden tomar valores para: $x = 1, 2, 3, \dots, 10$ y generar los

⁶Una situación didáctica adquiere la connotación de problema cuando el estudiante no lo puede resolver con herramientas algorítmicas de su dominio.

⁷ Se utilizará escolares para referirse a estudiantes de escuela primaria, en otros casos se usará estudiantes.

números que resulten para y , el resultado para y en la tabla 1 del anexo #1 es lo que los estudiantes conocen como la tabla del 3. Esta es una forma de relacionar conceptos aritméticos básicos como la multiplicación de dos números enteros con conceptos más avanzados. En este caso se representa una relación funcional entre los valores de x e y . En situaciones como esta se potencia el pensamiento variacional y según el grado que el estudiante cursa, las cantidades podrían variar.

Existen numerosas formas de plantear actividades que estimulen este pensamiento algebraico que a la vez sirven de preámbulo para introducir la noción de variable, concepto clave en el ámbito algebraico. Carpenter, Frankle & Levi (2004) citado por Aké (2015, p.2) sostiene que:

El pensamiento algebraico se puede desarrollar en los niños como resultado de la realización de actividades planificadas, que, partiendo de tareas aritméticas, o de otros bloques de contenido (medida y geometría), vayan creando progresivamente la tensión hacia la generalización, simbolización y el cálculo analítico.

También Kieran (2004, p.49) citado por Callejo (2016), apoya la idea de incluir formas de pensamiento algebraico en las primeras etapas escolares: “Debería incluir el desarrollo de formas de pensar sobre la relación entre cantidades, la identificación de estructuras, el estudio del cambio, la generalización, la resolución de problemas, la modelización, la justificación, la prueba y la predicción” (p.6).

La autora piensa que se pueden emanar beneficios importantes al hacer una introducción temprana del álgebra en la escuela, y como lo señalan algunos autores, no se trata de incluir temas de álgebra en el currículo, sino de desarrollar los conceptos aritméticos de forma creativa incluyendo relaciones entre cantidades de tal manera que haya variación, así el estudiante se identificaría con estructuras de cambio, de prueba y hasta de predicción, como en el caso de la tabla del 3 preguntarle qué le sucede a y si $x = 15$.

Existen otras formas de hacer álgebra temprana como la identificación de estructuras y la modelización, que en criterio de la autora se incluyen en la generalización de patrones numéricos, y que autores como (Bednarz, Kieran y Lee, 1996) citado por Aké (2015); Radford (2010); Callejo (2016), Vergel (2016), Aké (2017), argumentan, como resultado de sus investigaciones, que el análisis de los patrones ha sido considerado una ruta de acceso al pensamiento algebraico.

La autora concuerda con estas posturas, porque el proceso para encontrar el término general de un patrón requiere de una elaboración compleja, producto de la búsqueda y descubrimiento de las relaciones existentes entre los objetos que los conforman, tal procedimiento encaja con el desarrollo del pensamiento según Petrovski (1986) y por los objetos que intervienen en las generalizaciones desarrollan el pensamiento algebraico. Por esta razón se incluye un análisis de la generalización de patrones.

Patrones numéricos o algebraicos

Los patrones numéricos o algebraicos son secuencias numéricas o figurales⁸ que se representan mediante una expresión algebraica llamada *término general*, a partir de este se pueden generar otros términos dentro de la secuencia.

La generalización es el *término general*, utilizado en matemática para indicar el paso de lo particular a lo general y para ver lo general en casos particulares. Su descubrimiento requiere de un proceso de identificación, de descripción y abstracción, manifestada esta última en una expresión simbólica, apodóticamente llamada fórmula.

El proceso de descubrir el término general en una secuencia no siempre representa una tarea fácil para el estudiante. En investigaciones sobre patrones algebraicos, se ha descubierto que los estudiantes presentan dificultades para describir y expresar algebraicamente los patrones mediante un término general. De acuerdo con Vergel (2016) este proceso lleva implícito un grado de indeterminancia, acompañado de las limitaciones que los estudiantes tienen para pasar de manera espontánea de lo particular a lo general.

⁸ Radford (2000) introdujo el término *figural* para referirse a una secuencia compuesta por figuras que siguen un patrón en relación con su forma, más tarde Vergel (2016) le llama *secuencia figural* con apoyo tabular cuando a la par de cada figura aparece el número de elementos que la forman.



En la expresión de un patrón el estudiante pone en práctica su habilidad para comunicar mediante el lenguaje algebraico. En los estratos de Radford (2010) aparece el pensamiento algebraico factual, en el cual el estudiante describe la o las comunalidades encontradas (porque puede haber más de una) en forma discursiva, posteriormente se construye una contracción semiótica para finalizar con una expresión simbólica.

Para Vergel (2016), la generalización de patrones es el punto de partida hacia la abstracción matemática, porque es una de las actividades más asociadas al desarrollo del pensamiento algebraico, pues enfrenta al estudiante con situaciones que implican variación, acompañada por las formas discursivas, gestuales y procedimentales como evidencia de los intentos por construir argumentos y explicaciones de sus modos de pensar, en este escenario, el estudiante se enfrenta ante el reto de descubrir algo nuevo. Vergel le da importancia a las formas de recursos cognitivos, físicos y perceptuales, como comunicaciones simbólicas y orales, dibujos y gestos.

El abordaje de los patrones inicia desde la percepción, experimentación, identificación y expresión de las comunalidades en forma discursiva, Radford (2010) sugiere aplicar la o las comunalidades a todos los elementos y luego deducir una expresión que permita calcular el valor de cualquier término de la secuencia que no esté presente en el campo fenomenológico. Vergel (2016) & Radford (2010) sugieren utilizar los medios semióticos culturales tales como gestos, señalamientos corporales, palabras entre otros.

La generalización de la comunalidad Pierce (2003) citado por Vergel (2016) le llama abducción, esta será usada para deducir una fórmula o término general. En este sentido la característica común extraída del trabajo realizado sobre el campo fenomenológico juega un papel epistemológico. La abducción es asumida como un principio aplicable a todos los términos de la secuencia.

Radford (2010) identifica tres niveles de generalización, el primero es el factual en el que el estudiante describe las comunalidades solamente en forma discursiva, es un nivel elemental de generalizar. El segundo es el contextual, aquí aparecen gestos que ayudan a los estudiantes a comprender las relaciones que ocurren dentro del patrón combinado con el discurso y la visión, y el tercer nivel es el simbólico en este el estudiante expresa la generalización a través de símbolos alfanuméricos. Estos niveles están estrechamente relacionados con los estratos del pensamiento algebraico que el autor define.

Vergel (2016) en su investigación sobre el desarrollo del pensamiento algebraico en escolares de educación primaria, en Colombia, hizo un experimento con la estudiante Paulita, quien ante una secuencia figural apoya por representación tabular, ver anexo # 2, en la que se requiere inicialmente calcular el número de bolitas en la posición 5 y 10, describe en forma discursiva, apoyándose con señalamientos con el esfero la manera en que aborda la tarea según se observa en el anexo # 4.

Vergel (2016, p.28) establece un diálogo con Paulita con el propósito de analizar sus formas de pensar ante la situación problemática que se le presenta, ver anexo # 3. La estudiante solo pudo identificar comunalidades en forma discursiva como se ve en la línea 6, no obstante, las manifestaciones semióticas culturales presentes (anexos #3, #4) como la actividad perceptual, el movimiento del esfero, el ritmo, la palabra, representan un artesanal de “aspectos matemáticos corpóreos” que no pueden ser desestimados, pues brindan información importante sobre la emergencia de su pensamiento algebraico. Paulita se quedó en el primer estrato del pensamiento algebraico, es decir en el factual.

Hasta aquí se presenta la forma de desarrollar el pensamiento algebraico desde la óptica de diferentes autores, utilizando la generalización de patrones algebraicos, así como los medios semióticos culturales. La autora piensa que no existe un ordenamiento en las acciones que conducen al estudiante hacia el desarrollo del pensamiento algebraico. Propone llevar a este por el orden natural iniciando, según los estratos del pensamiento definidos por Radford (2010) el desarrollo del pensamiento factual, para después pasar al contextual y finalmente llegar al simbólico, considerando según Vergel (2016) los entornos adecuados.

Conclusiones

La inclusión del álgebra temprana en el currículo de primaria, permite desarrollar en el escolar potencialidades tendientes a fomentar diversas maneras de pensar con relación a la actividad matemática. Es urgente superar prejuicios o creencias acerca del aprendizaje de la matemática como que este sea memorístico, mecánico o descontextualizado, estos, aunque no se repitan se fomentan en los escolares por la manera en que se les enfrenta a las actividades matemáticas.

Una manera diferente de pensar puede ser adoptada por los escolares, basta que los profesores asuman la responsabilidad de diseñar actividades aritméticas con carácter algebraico gradual. No se trata de incluir contenidos de álgebra, sino provocar situaciones que desarrollen pensamiento variacional, que conduzcan al escolar hacia la generalidad, la simbolización y el cálculo analítico.

La autora se adhiere a los investigadores que se enfocan en el estudio de generalización de patrones como una vía de acceso al desarrollo del pensamiento algebraico, pues considera que en el análisis del comportamiento de un patrón hay mucha elaboración en el cerebro del estudiante. Se requiere de una intensa búsqueda de alguna regularidad o comunalidad en los términos del patrón. El estudiante debe explicar la comunalidad primero en forma discursiva, luego esforzarse por abreviar tal descripción (contracción semiótica) incluyendo algunos símbolos, y finalmente expresar el patrón mediante un término general apodóticamente llamado fórmula.

En el trabajo de generalización de patrones no se puede desaprovechar los elementos semióticos culturales que emergen, puesto que dan cuenta de la manera en que los estudiantes van desarrollando su pensamiento algebraico y que en la mayoría de los casos no son tomados en cuenta por los profesores. Si se trata de los escolares por lo general se quedarán en los estratos de pensamiento algebraico factual y contextual, sin embargo, es un buen inicio para que posteriormente, en secundaria, desarrollen el simbólico que representa el nivel más alto y es el ideal al que se aspira llevar a los estudiantes.

Las investigaciones desarrolladas por los autores mencionados en este trabajo, demuestran que emergen formas de pensamiento algebraico cuando los escolares están en la búsqueda intensa de lo común en un patrón, algunos, como el caso de Paulita, sólo se quedan a nivel factual, sin embargo otros avanzan hacia el contextual porque identifican lo indeterminado, aprenden a establecer una coordinación entre la estructura espacial y numérica, que más adelante les permitirá interpretar el significado de fórmulas y conceptos algebraicos más avanzados. Queda la tarea de seguir investigando como llevar al estudiante al nivel más avanzado de desarrollo del pensamiento algebraico, es decir, el simbólico y contribuir en la superación de las deficiencias presentadas en los niveles superiores.

Referencias bibliográficas

Aké, L. P. (2015). Distinción del pensamiento algebraico del aritmético en actividades matemáticas escolares. *XIV CIAEM-IACME. Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, 1-9. Recuperado el 12 de Abril de 2020, de <https://pdfs.semanticscholar.org/56bf/a8f408a6b6efc29d7a73c8373decd941f626.pdf>

Aké, L., & Cuevas, J. (2017). *Pensamiento algebraico en México desde diferentes enfoques* (Primera ed.). Aguascalientes, San Luis Potosí, México: CENEJUS-UASLP. Obtenido de https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/60075540/PENSAMIENTO_ALGEBRAICO_AKE_Y_CUEVAS20190721-71236-ghxu98.pdf?response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DPensamiento_algebraico_en_Mexico_desde_d.pdf&X-Amz-Algorithm=AWS4-HMAC-SHA256&X-Amz-

Butto, C., & Rojano, T. (Diciembre de 2010). Early algebraic thinking: The role of the environment *Logo. Scielo*, 22(3).

Callejo, M. L., García-Reche, A., & Fernández, C. (2016). Pensamiento algebraico de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de patrones lineales. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*(10), 5-25. Recuperado el 12 de Abril de 2020, de



file:///C:/Users/Usuario/Desktop/Monograf%C3%ADa%20Dra%20Olga/Pensamiento%20Algebraico%20temprano%20Maria%20L.%20Callejo%20Espa%C3%B1a%202016.pdf

Petrovski, A. (1986). *Psicología General*. San Salvador: Editorial Universitaria, Universidad de El Salvador.

Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. *Revista de investigación en Didáctica de la Matemática*, 117-133. Recuperado el 12 de Abril de 2020, de https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/20052/PNA6%284%29_1.pdf?sequence=1

Vergel, R. (2016). *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria*. Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Recuperado el 12 de Abril de 2020, de http://funes.uniandes.edu.co/8434/1/sobre_la_emergencia_del_pensamiento_algebraico_temprano_y_su_desarrollo_en_la_educacion_primaria.pdf.

Anexo # 1

Tabla 1

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y = mx$	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30

Anexo # 2

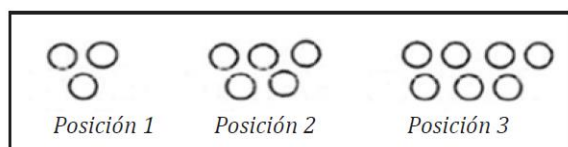


Figura 1: Secuencia figural con apoyo tabular presentada a Paulita

Anexo # 3: Diálogo del doctor Rodolfo Vergel con la estudiante Paulita

1. Rodolfo: ¿Cómo haces entonces para resolverlo?
2. Paulita: Entonces en la parte de arriba le sumo 1 (...) Si en la posición 1 hay 2 entonces en la posición 5 se le suma 1 o sea 6 y debajo le resto 1, que serían 5 bolitas, 5 bolitas [señala]. En la posición 10 al 10 le sumo 1 que serían 11 bolitas y abajo le resto 1 que serían 10 bolitas y ya.
3. Rodolfo: Mmmm ya, o sea ¿cómo haces para hacer la posición 7?, por ejemplo.
4. Paulita: Entonces serían 8 bolitas y 7 abajo [señala con el esfero].
5. Rodolfo: O sea ¿cómo es la relación?
6. Paulita: [Interrumpiendo] Arriba le sumo 1 y abajo le resto 1.

Anexo # 4



Figura 2: Paulita explica la regularidad percibida como sumar 1 arriba y restar 1 abajo, acompañando dicha explicación con movimientos del esfero.

Declaración de conflicto de interés y conflictos éticos

Los autores declaramos que este manuscrito es original, no contiene elementos clasificados ni restringidos para su divulgación ni para la institución en la que se realizó y no han sido publicados con anterioridad, ni están siendo sometidos a la valoración de otra editorial.

Contribuciones de los autores

Sara Vilma Rodríguez de Chicas: redacción del artículo, fundamentos teóricos, diseño de la metodología.

José Ron Galindo: diseño del artículo, fundamentos teóricos metodológicos, revisión de todo el contenido.