Empleo de la visualización matemática en el cálculo de volúmenes de sólidos en revolución

Use of mathematical visualization in the calculation of volumes of solids in revolution

Lic. Nolbert González Hernández. Profesor Instructor, Universidad de Holguín, Cuba.
Correo: nolbertreblon@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9579-1073

Dr. C. Miguel Cruz Ramírez. Profesor Titular, Universidad de Holguín, Cuba.
Correo: cruzramirezmiguel@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1697-1624

Dr. C. Wilber Garcés Cecilio. Profesor Auxiliar, Universidad de Holguín, Cuba.
Correo: wilbergc@uho.edu.cu
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2883-9882

Recibido: enero de 2022 Aprobado: julio de 2022

Resumen

En la investigación se desarrolla un enfoque metodológico basado en la visualización matemática apoyada en las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones. El objetivo es desarrollar de forma dinámica y activa el proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo de volúmenes de sólidos en revolución aplicando el cálculo integral. Para ello, se desarrolla un sistema de tareas docentes bajo este enfoque metodológico basado en la visualización, y se somete el mismo a un criterio de expertos. Como resultado del desarrollo de este enfoque metodológico se demuestra que existen cambios significativos en el aprendizaje de los estudiantes mediante la aplicación de una Prueba t. Por lo que, se concluye que el desarrollo de la propuesta favorece el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Palabras claves: visualización matemática; cálculo integral; sólidos de revolución.

Abstract

The research develops a methodological approach based on mathematical visualization supported by Information and Communication Technologies. The objective is to dynamically and actively develop the teaching-learning process of calculating volumes of solids in a revolution by applying integral calculus. For this, a system of teaching tasks is developed under this methodological approach based on visualization, and it is subjected to expert criteria. As a result of the development of this methodological approach, it is shown that there are significant changes in student learning through the application of a t-test. Therefore, it is concluded that the development of the proposal favors the teaching-learning process.

Keywords: mathematical visualization; integral calculus; solids of revolution.

Introducción

El estudio del espacio tridimensional es un **Órbita Científica. No. 120 Vol. 28 julio-septiembre de 2022 ISSN: 1027-4472**

área donde existen dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática (Orcos, Jordán y Magreñán, 2019). Específicamente, el cálculo de volúmenes generados por cuerpos en revolución requiere que el estudiante desarrolle habilidades para visualizar funciones, áreas y volúmenes en R^3. En este sentido, la visualización está relacionada con los procesos mentales abstractos y las capacidades de los estudiantes para realizar tareas en las que se emplee la imaginación de objetos, y donde se realicen transformaciones con los mismos (Medina, Castro y Juárez, 2019).

En la enseñanza de la matemática de forma puramente algebraica, predomina el empleo de reglas y técnicas que son utilizadas sin analizar el significado de los objetos, relaciones u operaciones que intervienen en las tareas docentes que se desarrollan. Por lo que, a los estudiantes les resulta complejo representar las mismas tareas en diferentes sistemas semióticos (Grijalva y Dávila, 2020). En este sentido, diferentes investigadores en el campo de la Educación Matemática expresan la necesidad de dinamizar el proceso de enseñanza-aprendizaje mediante el empleo de la visualización (Kaenders y Weiss, 2018; Karpov, Klepov y Nikitin, 2020).

En la presente investigación, se ofrece un enfoque metodológico para la enseñanza del cálculo diferencial en R^3, específicamente para darle tratamiento al cálculo de volúmenes de cuerpos en revolución alrededor de un eje de coordenada u otra curva. En el desarrollo del proceso docente, la visualización es empleada mediante el uso de simulaciones dinámicas en el software Wolfram *Mathematica*, lo que permite aprehender los conceptos fundamentales del cálculo integral y particularmente el concepto de volúmenes de revolución. El apoyo en recursos tecnológicos y el razonamiento de situaciones particulares bajo este enfoque, confirma que los objetos, relaciones y operaciones en matemática no son estáticos y que el empleo de la visualización puede ser favorable (Asmuss y Budkina, 2019).

Empleo de la visualización en la enseñanza de la matemática

El empleo de la visualización en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática es objeto de estudio de numerosas investigaciones debido fundamentalmente al desarrollo de recursos tecnológicos y al uso didáctico de los mismos (Phillips, Norris y Macnab, 2010). Así, la visualización asume un papel protagónico, ofrece un significado a las tareas docentes planeadas y se relaciona con "…entender un enunciado mediante la puesta en juego de diferentes representaciones de la situación en cuestión…" (Hitt, 2003, p. 214).

Adame et al. (2019) sostiene que, observando una representación gráfica de un objeto matemático pueden surgir en los estudiantes una variedad de preguntas, vinculadas a los cambios de representaciones semióticas. En este sentido la comprensión de un contenido conceptual "…reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación… la aprehensión de un concepto solo se logrará si existen actividades de conversión de una representación a otra y viceversa propiciando con esto la construcción de los conceptos matemáticos" (p. 365). Por otra parte, Duval (1999) plantea que es necesario desarrollar las tres habilidades relacionadas con la semiosis: la formación, el tratamiento y la conversión. Se refiere a la visualización como la capacidad de pasar de una representación plasmada de una forma, a otra plasmada de otra forma de manera bidireccional. Igualmente, Arcavi (2003) revela que la visualización se puede analizar como un proceso doble, uno que va desde lo concreto a lo abstracto y otro que va desde lo abstracto a lo concreto. Además, plantea que "…la visualización ofrece un método para observar lo invisible" (p. 216). Esta "observación" puede ser mental y no estar relacionada con objetos físicos o, puede estar relacionada con representaciones físicas y entonces representar objetos perceptibles.

Empleo de la visualización mediante representaciones dinámicas

Las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) en la enseñanza de las matemáticas son utilizadas en diferentes niveles de enseñanza (González, Garcés, y Grimaldy, 2021; Gutiérrez, Aristizabal y Rincón, 2020). Los docentes incorporan las TIC al proceso de enseñanza con el objetivo de realizar actividades didácticas constructivas, que desarrollen habilidades para la búsqueda e interpretación de la información. Por lo que, se modifica el modelo de enseñanza algebrista y los estudiantes se convierten en protagonistas en el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje (Cristina y Godoy, 2018).

El proceso de enseñanza-aprendizaje de contenidos relacionados con espacios tridimensionales ha sido desarrollado utilizando las TIC, obteniéndose resultados favorables a partir del uso de representaciones dinámicas. Lo que ha permitido, que se puedan representar las tareas docentes en diferentes sistemas semióticos de una forma simple, por lo que la visualización es la protagonista en el desarrollo de estas actividades (Vergara, 2022). El software *Wolfram Mathematica* específicamente, es utilizado en educación matemática para desarrollar el proceso de enseñanza-aprendizaje empleando la visualización en la dinamización del proceso. Este software puede ser utilizado para la enseñanza de diferentes contenidos: matemática discreta (Campuzano y Crisanto, 2022; Vílchez, 2019), planteo y resolución de problemas prácticos relacionados con el cálculo integral (Mahayukti, y Dewi, 2021), integrales dobles (Milenković y Božić, 2020), geometría analítica (Campuzano y Crisanto, 2022), por citar algunos ejemplos.

Metodología

La investigación fue desarrollada siguiendo un Diseño de Triangulación Concurrente (DITRIAC) planteada por Hernández, Fernández y Batista (2010, p. 570). En su desarrollo se aplica un enfoque metodológico basado en la visualización matemática con apoyo en las TIC. En este sentido, se desarrolla el proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo de volúmenes de cuerpos en revolución en la carrera Licenciatura en Educación Matemática, apoyado en el software Wolfram Mathematica. Las representaciones dinámicas representadas en este software fueron analizadas para visualizar las relaciones con ecuaciones algebraicas usadas en este tema, sus significados y aplicaciones.

El sistema de tareas docentes desarrollas bajo este enfoque metodológico basado en la visualización, fue sometido a un criterio de expertos con el objetivo de buscar consenso, potencialidades y debilidades. Además, se socializó este sistema de tareas docentes mediante talleres, donde participaron profesores experimentados en el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. Por otro lado, se realizó un test antes del desarrollo del proceso docente bajo este enfoque y otro después, con el objetivo de medir cuantitativamente si existen o no diferencias significativas en el aprendizaje.

Desarrollo

En la carrera Licenciatura en Educación Matemática se imparten contenidos diversos, que abarcan desde sucesiones y series hasta ecuaciones diferenciales, en el marco de la disciplina Análisis Matemático. Específicamente, el cálculo integral en $\boldsymbol{R^n}$ se imparte en Análisis Matemático IV, y una de sus aplicaciones es el cálculo de volúmenes de sólidos en revolución. La aprehensión de este contenido, sus aplicaciones y su interpretación matemática son fundamentales en la formación de profesores de matemática, por lo que para potenciar este proceso de enseñanza-aprendizaje se plantea la necesidad de emplear la visualización matemática con el apoyo de las TIC.

El empleo de la visualización con apoyo en el software Wolfram Mathematica permite dinamizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, en este sentido, a continuación se ilustra con un ejemplo de tarea docente desarrollada con el apoyo de este software.

Tarea 1 Calcula el volumen resultante al hacer rotar la función $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}+\mathbf{1})^{\mathbf{2}}$ en el intervalo $[\mathbf{0};\mathbf{4}]$, alrededor del eje de las abscisas.

- Grafica de la función $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ en el intervalo dado: Plot[(x+1)^2,{x,0,4}]

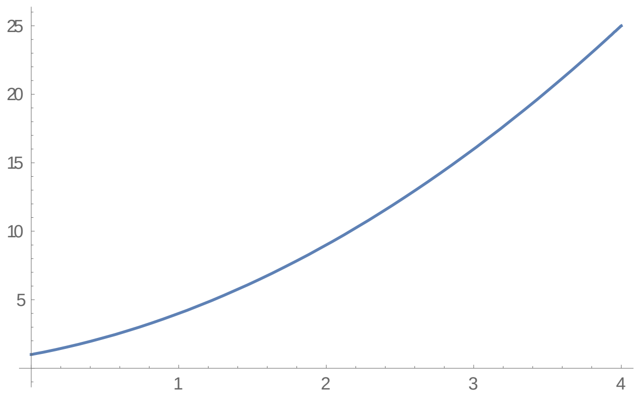

Figura *1* Gráfico de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ en el intervalo $[\mathbf{0};\mathbf{4}]$ exportada de la consola de Wolfram Mathematica

- Rotar la función respecto al eje de las abscisas en el intervalo $[\mathbf{0};\mathbf{4}]$:

$$\boldsymbol{RevolutionPlot3D}[\{(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})\string^\mathbf{2}\},\{\boldsymbol{x},\mathbf{0},\mathbf{4}\},\boldsymbol{AxesLabel}\rightarrow\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\},\boldsymbol{RevolutionAxis}\rightarrow\{\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0}\}]$$

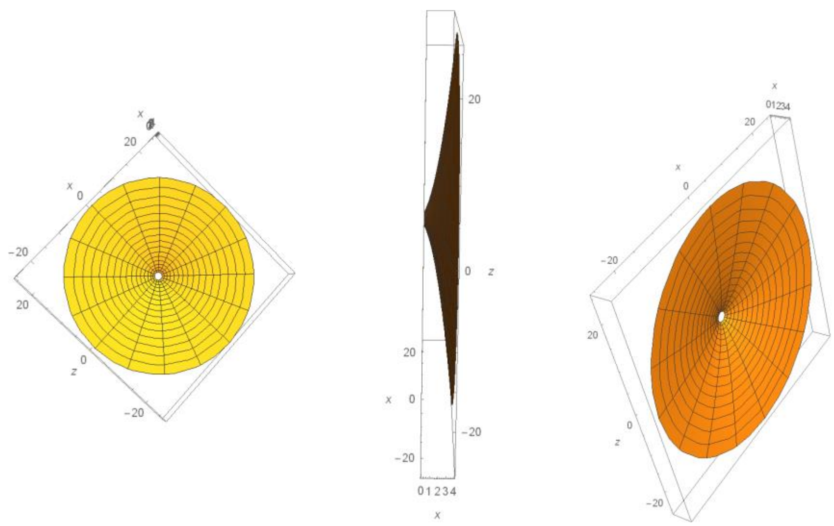

Figura *2* Perspectivas del sólido de revolución obtenido exportado de la consola de Wolfram Mathematica

Para calcular el volumen del cuerpo generado se utiliza la fórmula $\boldsymbol{\pi}\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))^{\mathbf{2}}\boldsymbol{dx}$, que resulta en la integral:

$\boldsymbol{\pi \int_0^4 ((x+1)^2)^2\, dx}$. La siguiente función del software ofrece el resultado deseado:

$$\boldsymbol{Integrate[\pi((x+1)\text{^}2)\text{^}2, \{x, 0, 4\}]}$$

$$= \frac{\mathbf{3124\pi}}{\mathbf{5}}$$

Calcula el volumen resultante al hacer rotar la función $\boldsymbol{y = (x+1)^2}$ en el intervalo $[\mathbf{0}; \mathbf{4}]$, alrededor del eje de las ordenadas.

Para graficar en $\boldsymbol{R^3}$el volumen del cuerpo generado es necesario realizar un análisis de la fórmula que se emplea para calcular volúmenes cuando $\boldsymbol{f(x)}$ rota respecto a las ordenadas $\boldsymbol{V = \pi \int_a^b (f(y))^2 dx}$. En este caso, es necesario expresar $\boldsymbol{f}$ en función de $\boldsymbol{y}$, o sea $\boldsymbol{f(y) = \sqrt{y} - 1}$ y evaluar $\boldsymbol{f(a) = f(0) = 1}$ y $\boldsymbol{f(b) = f(4) = 25}$ para obtener los valores de integración $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ para $\boldsymbol{f(y)}$ en el intervalo $[\mathbf{0}; \mathbf{4}]$. Esta función $\boldsymbol{f(y)}$ se puede graficar en el software expresándola en función de x, es decir estaríamos graficando $\boldsymbol{f^{-1}x}$. Para ello se puede utilizar la función: $\mathbf{Plot}[\sqrt{\boldsymbol{x}} - \mathbf{1}, \{\boldsymbol{x}, \mathbf{0}, \mathbf{25}\}]$, que genera la Figura 3.

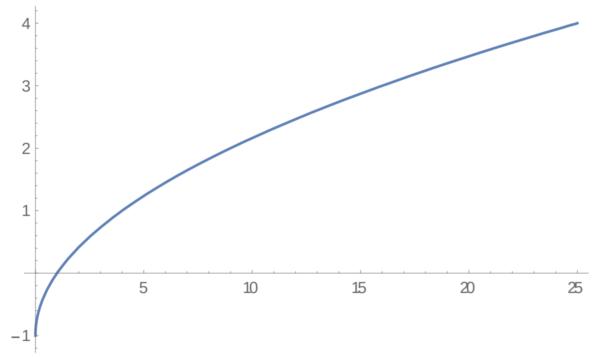

Figura *3* Gráfico de $\mathbf{f}^{-1}(\boldsymbol{x})$ en el intervalo $[\mathbf{0}; \mathbf{25}]$ exportada de la consola de Wolfram Mathematica

Es importante enfatizar en que $\boldsymbol{f^{-1}(x)}$ intersecta el eje de las abscisas en el punto (1;0) por lo que al hacer rotar $\boldsymbol{f^{-1}(x)}$ en el intervalo $[\mathbf{1}; \mathbf{25}]$ entorno al eje de las abscisas, se obtendría el mismo cuerpo que al hacer rotar $\boldsymbol{f(x)}$ en el intervalo de $[\mathbf{0}; \mathbf{4}]$ entorno al eje de las ordenadas (ver Figura 4 y 5). En efecto, si se plotea la rotación de $\boldsymbol{f^{-1}(x)}$ en el intervalo $[\mathbf{1}; \mathbf{25}]$ entorno al eje de las abscisas mediante la función:

$\mathbf{RevolutionPlot3D}[\{\sqrt{\boldsymbol{x}} - \mathbf{1}\}, \{\boldsymbol{x}, \mathbf{1}, \mathbf{25}\}, \mathbf{AxesLabel} \to \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}, \mathbf{RevolutionAxis} \to \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}\}]$, da como resultado la siguiente representación

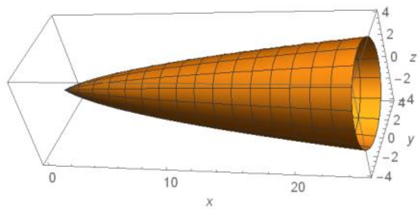

Figura *4* Representación en $\boldsymbol{R^3}$ de la rotación de $\boldsymbol{f^{-1}(x)}$ en el intervalo $[\mathbf{1};\mathbf{25}]$ entorno al eje 0X

Y si se plotea f(x) en el intervalo de $[\mathbf{0};\mathbf{4}]$ rotando respecto al eje de las ordenadas, da como resultado la siguiente representación

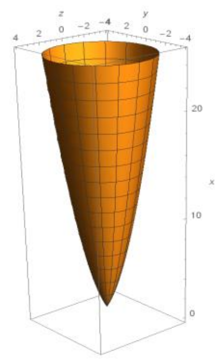

Figura *5* Representación en $\boldsymbol{R^3}$ de la rotación de $\boldsymbol{f(x)}$ en el intervalo $[\mathbf{0};\mathbf{4}]$ respecto al eje 0Y

Lo anterior verifica que es posible calcular el volumen del cuerpo generado mediante el cálculo de la integral definida $\boldsymbol{\pi}\int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{25}}(\sqrt{\boldsymbol{x}}-\mathbf{1})^{2}\boldsymbol{dx}$. Para resolver esta integral utilizamos la siguiente función del software Mathematica: $\boldsymbol{Integrate}[\boldsymbol{\pi}(\sqrt{\boldsymbol{x}}-\mathbf{1})\hat{}\mathbf{2},\{\boldsymbol{x},\mathbf{1},\mathbf{25}\}]$, que se obtiene como resultado: $\mathbf{V}=\frac{\mathbf{512\pi}}{\mathbf{3}}$.

En el desarrollo de esta tarea sin el empleo de la visualización con apoyo en las TIC, se tiende a resolver la integral $\boldsymbol{\pi}\int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{25}}(\sqrt{\boldsymbol{y}}-\mathbf{1})^{2}\boldsymbol{dy}$ para encontrar el volumen del cuerpo. Por lo que, a los estudiantes les resulta difícil comprender el significado de este cambio de la variable $\boldsymbol{x}$ a la $\boldsymbol{y}$, y la interpretación de $\boldsymbol{f(x)}$ y $\boldsymbol{f(y)}$ sin tener bien concebido las definiciones de $\boldsymbol{f(x)}$ y $\boldsymbol{f^{-1}(x)}$ y sus relaciones. Por lo que, el enfoque metodológico planteado en la investigación ayuda en la interpretación y aplicación de este contenido.

Resultados

El sistema de tareas docentes desarrollas bajo un enfoque metodológico basado en la visualización, fue valorado por 30 expertos, los cuales son docentes e investigadores en el campo de la Educación Matemática. De los 30 expertos se seleccionaron 10, mediante la aplicación de un instrumento para determinar el nivel de competencia de un candidato a experto (Cruz y Martínez, 2012). Posteriormente, los 10 expertos seleccionados emitieron una evaluación mínima y una evaluación máxima de la propuesta, siendo la menor evaluación posible "0" y la máxima evaluación posible "100". La información obtenida fue procesada utilizando la función Cloud Delphi (Delphi de Nube) elaborada por Cruz (2020) sobre el entorno y lenguaje de programación con enfoque al análisis estadístico R. Obteniéndose los siguientes resultados (Tabla 1):

Tabla *1* Resultados exportados de R

Var.	Exp_1	Exp_2	Exp_3	Exp_4	Exp_5	Exp_6	Exp_7	Exp_8	Exp_9	Exp_10	Exp_s
Ex	90.00	90.00	92.50	90.00	92.50	88.00	91.50	89.50	89.00	92.50	90.55
En	0.67	1.67	0.83	1.67	0.83	1.33	1.50	1.17	1.67	1.17	2.00
He	0.11	0.28	0.14	0.28	0.14	0.22	0.25	0.19	0.28	0.19	0.21
w	0.17	0.07	0.13	0.07	0.13	0.08	0.08	0.10	0.07	0.10	1.00
ΔEn	0.67	1.67	0.83	1.67	0.83	1.33	1.50	1.17	1.67	1.17	2.00
Unc	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17

Seguidamente, la Figura 6 facilita la comprensión de los datos. Puede observarse que las opiniones de los expertos son discordantes; que la nube promedio Exp_s presenta menor incertidumbre en valores cercanos a 90.55 y mayor incertidumbre en valores cercanos a 88 y 93.4. De igual forma se observa que, el experto número uno posee mayor peso relativo (w=0.17) en comparación a los demás expertos. Justifica su mayor peso (w) el hecho de se localiza en valores cercanos a 90.55 de la nube promedio Exp_s, que es precisamente el valor esperado de la variable Expectación (Ex).

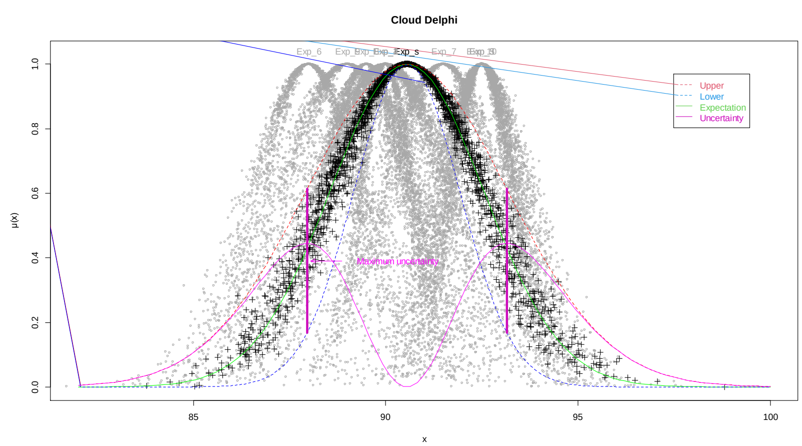

Figura *6* Procesamiento de las evaluaciones emitidas mediante la función Cloud Delphi

Para determinar si existe diferencia significativa se procesan los resultados de los test aplicados antes y después de la propuesta, mediante una Prueba t para muestras relacionadas, que compara las medias de dos variables de un solo grupo. Este procedimiento calcula las diferencias entre los valores de las variables de cada caso y contrasta si la media difiere de 0 (Garzóny Villota, 2020). Los resultados obtenidos se exponen en la siguiente tabla:

Tabla *2* Resultados de la Prueba t

	Intervalo de Confianza del 95% (IC)					
	Inferior	Superior	t	Medias		p
$Test1 - Test2$	-1.1666	-0.7763	-10.117	$Test1$= 2.83	$Test2$= 3.828571	0.000000000008653

Como p<0.05, se puede afirmar que las medias entre el Test 1 y el Test 2 son significativamente diferentes. Por lo que, se puede concluir que la propuesta implementada favorece el proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo diferencial aplicado al cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución.

Discusión

En la investigación se verifica que el empleo de la visualización favorece el proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo integral en la formación de profesores de matemática. Además, se observa que en investigaciones relacionadas con su empleo para impartir otros contenidos se obtienen similares resultados.

De igual forma, se observa que con el empleo de la visualización apoyada en las TIC se pueden construir representaciones dinámicas de los objetos, relaciones y operaciones que se estudian y los estudiantes tienen la posibilidad de representar estos objetos en diferentes sistemas semióticos.

La presente investigación fue desarrollada con estudiantes de tercer año de la carrera Licenciatura en Educación Matemática, no obstante se pueden obtener resultados similares empleado el enfoque didáctico propuesto en carreras con perfiles matemáticos y en carreras donde se desarrolle el proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo integral de manera general, siempre que los estudiantes posean bases conceptuales sólidas de los contenidos precedentes.

Referencias Bibliográficas

Adame, A., Torres, M., Borjón, E. y Hitt, F. (2019). Niveles de comprensión del concepto de identidad trigonométrica mediante visualización matemática en GeoGebra. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *32*(1), pp. 364-373. http://funes.uniandes.edu.co/13938/1/Adame2019Niveles.pdf

Arcavi, A. (2003). The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(3), 215-241. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1024312321077

Asmuss S. and Budkina, N. (2019). On usage of visualization tools in teaching mathematics at universities. *18th International Scientific Conference Engineering for Rural Development*. DOI: https://doi.org/10.22616/ERDev2019.18.N515

Campuzano, M. and Crisanto, T. (2022). Learning Analytic Geometry with the aid of Wolfram Alpha. International Journal of Innovative *Science and Research Technology, 7*(1), pp. 722-727. https://ijisrt.com/assets/upload/files/IJISRT22JAN661_(1).pdf

Cruz, M. y Martínez, M. (2012). Perfeccionamiento de un instrumento para la selección de expertos en las investigaciones educativa. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 14*(2), p. 167-179. DOI: http://redie.uabc.mx/vol14no2/contenido-cruzmtnz2012.html

Cruz. M (2020). Una función en R para el método Delphi de nube. *Aplicaciones al pronóstico educacional. Tecnología Educativa*, *5*(1), pp. 95-107. https://tecedu.uho.edu.cu/index.php/tecedu/article/view/210

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 2-26. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED466379.pdf

Garzón, M. y Villota, W. (2020). Prueba t para muestras relacionadas e independientes usando Rstudio, para que sirve y cómo aplicarlo. En T. Fontaines-Ruiz, J. Maza-Cordova, J. Pirela , Y. Armaza , (Ed). *Convergencias y divergencias en investigación*, pp. 192-203. http://www.idi-unicyt.org/wp-content/uploads/2020/08/Libro-convergencias-divergencias-tendin.pdf

González, N., Garcés, W. y Grimaldy, L. (2021). La visualización en la enseñanza de la matemática. Su empleo mediante el uso del geogebra. *Didasc@lia: Didáctica y Educación, 12*(4), pp. 130–140. https://revistas.ult.edu.cu/index.php/didascalia/article/view/1206

Grijalva, A. y Dávila, M. (2020). Integral y visualización. En P. Balda, M. Parra, y H. Sostenes (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 33*(1), pp. 220-230. http://funes.uniandes.edu.co/22396/1/Grijalva2020Integral.pdf

Gutiérrez, H., Aristizabal, J. y Rincón, J. (2020). Procesos de visualización en la resolución de problemas de matemáticas en básica primaria apoyados en ambientes de aprendizaje mediados por las TIC. *Sophia*, *16*(1), pp. 120-132. http://dx.doi.org/10.18634/sophiaj.16v.1i.975

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). *Metodología de la Investigación* (Quinta edición). ISBN: 978-607-15-0291-9. https://www.icmujeres.gob.mx/wp-content/uploads/2020/05/Sampieri.Met.Inv.pdf

Hitt, F. (2003). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Maten ática Venezolana, 10*(2), pp. 213-223. https://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/fernandoHitt.pdf

Ivanov O. and Fridman G. (2019). Об опыте использования среды WOLFRAM MATHEMATICA в курсе дискретной математики [Sobre la experiencia de utilizar el entorno WOLFRAM MATHEMATICA en el curso de matemáticas discretas]. *Herramientas informáticas en la educación*, (2), pp. 43-54. https://doi.org/10.32603/2071-2340-2019-2-43-54

Kaenders, R. and Weiss, Y. (2018). Algebra Without Context Is Empty, Visualizations Without Concepts Are Blind. In: K. Clark, T. Kjeldsen, S. Schorcht, C. Tzanakis (eds). *Mathematics, Education and History*, pp. 121-141. ICME-13 Monographs. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73924-3_7

Karpov, A., Klepov, V. and Nikitin, A. (2020). On Mathematical Visualization in Education. In: V. Sukhomlin, E. Zubareva (eds). *Convergent Cognitive Information Technologies. Communications in Computer and Information Science*, 1140, pp. 11-17. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-37436-5_2

Mahayukti, G., & Dewi, P. (2021). Validity and Practicality of Problem-Based Integral Calculus Teaching Materials Assisted with Mathematical Software. In 4th International Conference on Innovative Research Across Disciplines, pp. 13-20. https://www.atlantis-press.com/article/125966736.pdf

Medina, L., Castro, J. & Juárez, S. (2019). Developing spatial mathematical skills through 3D tools: augmented reality, virtual environments and 3D printing. *International Journal on Interactive Design and Manufacturing*, (13), pp. 1385–1399. https://doi.org/10.1007/s12008-019-00595-2

Milenković, A. and Božić, R. (2020). On the influence of software application for visualization in teaching double integrals. *Interactive Learning Environments*, pp. 1-16. https://doi.org/10.1080/10494820.2020.1719164

Orcos, L., Jordán, C., & Magreñán, A. (2019). 3D visualization through the Hologram for the Learning of Area and Volume Concepts. *Mathematics, 7*(3). http://dx.doi.org/10.3390/math7030247

Phillips, L., Norris, S. and Macnab J. (2010). *Visualization Mathematics, Reading and Science Education. Models and Modeling in Science Education*. Springer. https://disnawati.files.wordpress.com/2011/11/visualization-in-mathematicsreading-and-science.pdf

Vergara, J. (2022). Sólidos de Revolución y suma de Riemann en GeoGebra. *Revista Digital: Matemática, Educación E Internet, 22*(2), pp. 1- 20. https://doi.org/10.18845/rdmei.v22i2.6134

Vílchez, E. (2019). Estudio de caso: Estrategia de enseñanza y aprendizaje asistida por computadora para un curso de matemática discreta a través del uso del paquete VilCretas en el software Wolfram Mathematica. *Revista Electrónica Educare, 23*(2), pp. 1-25. http://dx.doi.org/10.15359/ree.23-2.13

Declaración de conflicto de interés y conflictos éticos

Los autores declaramos que este manuscrito es original, no contiene elementos clasificados ni restringidos para su divulgación ni para la institución en la que se realizó y no han sido publicados con anterioridad, ni están siendo sometidos a la valoración de otra editorial.

Los autores somos responsables del contenido recogido en el artículo y en él no existen plagios, conflictosde interés ni éticos.

Contribuciones de los autores

Autor Principal: redacción del artículo, fundamentos teóricos, diseño de la metodología, tratamiento informático.

Coautor 1: fundamentos teóricos metodológicos, revisión de todo el contenido

Coautor 2: revisión de todo el contenido.