Tratamiento de los dominios numéricos en la escuela cubana

Treatment of the numeric domains in the Cuban schoo

MSc .Yulexis Utria Rojas UNAH "Fructuoso Rodríguez Pérez" Facultad de Pedagogía. Profesora de Geometría de la carrera Licenciatura en Educación especialidad. Matemática. Cuba
dfernandez@infomed.sld.cu
MSc. María Teresa Gil Chávez. Profesora de Estadística. UNAH "Fructuoso ¡Rodríguez Pérez" Facultad de Pedagogía. Especialidad Matemática. Cuba
E-mail: maria@unah.edu.cu
MSc. Hilba Rivero Álvarez. Profesora de Estadística. UNAH "Fructuoso Rodríguez Pérez" Facultad de Pedagogía. Especialidad Matemática. Cuba

Recibido noviembre 2017 Aprobado enero 2018

Resumen:
El objetivo de este trabajo es argumentar el surgimiento de los diferentes dominios numéricos y mostrar su tratamiento en la escuela cubana actual .Al transcurso de los años surgieron más números y se desarrollaron sus símbolos, primero se define los naturales, los fraccionarios surgen ligado a la medida, históricamente, los números negativos surgen ligados al comercio, los irracionales están ligados a la necesidad de dar fundamento más riguroso al Cálculo Infinitesimal. El conjunto formado por todos los números racionales y los irracionales es el de los números reales, de modo que todos los números mencionados hasta ahora (naturales, enteros, racionales, irracionales) son reales. Al avanzar en el estudio de las Matemáticas se le presentan diferentes problemas que lo llevan a través de un largo proceso de abstracciones a ampliar los dominios conocidos hasta llegar a los reales y los complejos. Tratando de mantener la mayor cantidad posible de propiedades que se cumplían en el dominio anterior y de forma tal que este estuviera contenido en el nuevo. En el transcurso de todos los grados de la Enseñanza General el estudiante se apropia de los conceptos fundamentales de los diferentes dominios numéricos y sus limitaciones adquiriendo habilidades en la operatoria con los mismos.
Palabras clave: Dominios numéricos, escuela cubana
Abstract
The objective of this work is to argue the emergence of the different numerical domains and show their treatment in the current Cuban school. Over the years more numbers emerged and their symbols were developed, first the naturals are defined, the fractionals arise linked to the historically, negative numbers arise linked to trade, the irrational are linked to the need to give more rigorous foundation to the Infinitesimal Calculus. The set consisting of all rational and irrational numbers is that of real numbers, so that all the numbers mentioned so far (natural, integer, rational, irrational) are real. When advancing in the study of Mathematics, different problems arise that take him through a long process of abstractions to expand the known domains to reach real and complex ones. Trying to keep as many properties as possible that were fulfilled in the previous domain and in such a way that it was

contained in the new one. In the course of all the degrees of the General Teaching the student appropriates the fundamental concepts of the different numerical domains and their limitations acquiring skills in the operation with them.

Keyword: Numerical domains, Cuban school

Introducción

"Dios creó los números naturales, lo demás es obra del hombre."
Leopoldo Kronecker [1]

El concepto es una de las formas del reflejo del mundo en el pensamiento, mediante el cual se conoce la esencia de los fenómenos y procesos. Las ciencias matemáticas en el transcurso de su desarrollo han acumulado una enorme cantidad de hechos que atestiguan que los conceptos matemáticos, las propiedades y las demostraciones lógicas tienen una procedencia práctica vinculada a los procesos reales del mundo exterior.

Son muchos los ejemplos que se pueden presentar acerca del origen práctico de los conceptos matemáticos, la historia de las ciencias, en general, y de la matemática, en particular, nos brindan una gran variedad de ellos.

Para nadie es un secreto que el cálculo de probabilidades tiene su origen en los juegos de azar de la alta sociedad del siglo XVI. El sistema de numeración de los egipcios tiene por base el número 10, como el nuestro. Ese número 10 corresponde, evidentemente, como lo subrayara, en particular, Aristóteles a los 10 dedos de las dos manos sobre los que los hombres aprendieron a contar y, por consiguiente, a realizar la primera operación matemática.

¿Podría la Matemática ser un instrumento del desarrollo de la producción y otras ciencias, si sus conceptos y leyes no fueran reflejo de las propiedades y relaciones entre los objetos y procesos del mundo real? El más antiguo manuscrito sobre los números que conocemos, que es el papiro Rhind, constituye una colección de 84 problemas de carácter aplicado.

El origen de la matemática está en los problemas geométricos, físicos, económicos y otros; por tanto, en la realidad objetiva. De estos problemas surgieron, finalmente, conceptos "complejos" como función irracional, número real, límite, derivada, entre otros. Pero la mayor parte de estos conceptos y leyes matemáticas, abstraídos y construidos a partir de la realidad objetiva, han surgido a través de varios niveles de abstracción, de forma tal que en muchos casos apenas se reconoce el punto de partida objeto-real. Conceptos "simples" como número natural, número primo, cono, no representan ya un reflejo directo de la realidad objetiva, sino que reflejan la realidad a través de varios niveles de abstracción.

En este trabajo se pretende argumentar el surgimiento de los diferentes dominios numéricos y mostrar su tratamiento en la escuela cubana actual.

Desarrollo

Breve historia de los dominios numéricos

El concepto de número surgió como consecuencia de la necesidad práctica de contar los objetos. Inicialmente, se contaba con ayuda de los medios disponibles: dedos, piedras, conos de abetos, etc. Huellas de esto se han conservado en las

denominaciones de los cálculos matemáticos; por ejemplo, *calculus* en su traducción del latín significa *cuenta con piedras*. La reserva de números de la primera etapa era muy limitada, la sucesión de los números naturales conocidos y utilizados era finita y se fue extendiendo solo gradualmente; la conciencia de que era ilimitada constituye un síntoma de alto nivel de conocimientos y cultura.
Junto a la utilización de más y más números surgieron y se desarrollaron sus símbolos, y los propios números formaron sistemas. El sistema posicional de numeración decimal utilizado actualmente en todos los países, es el resultado de un largo proceso de desarrollo histórico. ..La escritura en el sistema decimal posicional con el cero apareció por primera vez aproximadamente en el año 500 a.n.e. en la India.
Los rudimentarios conocimientos matemáticos de las civilizaciones anteriores a la griega, de índole puramente práctica, excluyen toda clase de disquisiciones sobre el concepto de número; no sucediendo así en Grecia, donde esta cuestión atrae ya la atención de los filósofos, con poca fortuna; pues confundiendo la Matemática con la Metafísica dan definiciones sin valor científico ninguno.
Euclides, (hacia 300 a.n.e.), define el número natural en su célebre obra Elementos (libro VII) como la pluralidad compuesta de unidades. Leibniz (1646- 1716) en sus "Nuevos ensayos" declaró el número natural no definible. Análogo criterio sustentó Leopoldo Kronecker (Alemania 1823-1892) quien expresó ***"****Dios creó los números naturales, lo demás es obra del hombre."*
Es inútil tratar de hallar una definición o teoría satisfactoria del número natural entre los tratadistas anteriores a 1850. Solo en la segunda mitad del siglo XIX se hace necesario, debido a los progresos sorprendentes del Análisis, apuntalar debidamente el edificio matemático y se emprende la revisión crítica de los principios matemáticos.
El número fraccionario surge ligado a la medida. Cuando existe la necesidad de medir con una unidad de medida dada y esta no cabe exactamente en lo que se mide es necesario utilizar partes de esta unidad y surge la idea de fracción.
Las fracciones eran ya conocidas en el antiguo Egipto y Babilonia. Los egipcios crearon un aparato especial que se apoyaba en la interpretación de la fracción solo como parte de la unidad. En virtud de esta idea, se utilizaban solo fracciones alícuotas (de la forma $\frac{1}{n}$) y algunas particulares, como por ejemplo $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$.
Pero no puede hablarse de una teoría de tales números hasta Euclides que nos expone en los libros V y VI de los Elementos la teoría de las proporciones, según Eudoxio, la cual puede considerarse como una teoría general de las fracciones en el caso de la conmensurabilidad. Para Isaac Newton (1642-1727) el genial matemático y físico inglés, la fracción es símbolo del cociente del numerador por el denominador.
Históricamente, los números negativos surgen ligados al comercio. Su uso se encuentra ya, aunque solo de modo práctico y sin acertar todavía a definirlos, en los matemáticos indios. Brahmagupta (598-660) da reglas como esta: "la suma de dos créditos es un crédito y la de dos deudas una deuda, mientras que la de un crédito y una deuda es su diferencia, o cero si son iguales"
Descartes (1596-1650) emplea las letras para indicar indistintamente números positivos y negativos y aunque desarrolla por completo las reglas de cálculo con números negativos, no tiene un concepto perfectamente claro de tales números;

pues ve en ellos algo de irreal, y así declara falsa la raíz de una ecuación cuando ésta es negativa.
No podía escapar a la mente perspicaz de Newton el verdadero significado de los números negativos. Para él, los números racionales son representaciones analíticas de las magnitudes dotadas de dos sentidos.
Los números irracionales surgen como resultado de la inconmensurabilidad, al intentar medir la diagonal de un cuadrado tomando su lado como unidad de medida, su conocimiento precede cronológicamente al de los números negativos.
Se atribuye a Pitágoras (unos 500 años a.n.e) el notable descubrimiento de la inconmensurabilidad de la diagonal del cuadrado de lado 1, que viene a dar respuesta negativa a la cuestión de si los números racionales llenaban la recta numérica.
Si en Geometría no se consideran otros números que los naturales y racionales pronto, se llegaría a contradicciones; pero no fueron estos los únicos problemas que llevan al número irracional ya que existen, por ejemplo, números racionales sin raíces racionales. En el lenguaje del Álgebra, existen ecuaciones binomias $x^3 = 5$, $x^2 = \frac{2}{5}$ que no tienen solución racional.

Muchos autores han querido ver en la teoría ecuclídea de las proporciones una definición por abstracción de los números reales comparable con las modernas teorías de dichos números, pero en realidad, habiendo omitido Euclides el postulado de la continuidad, enunciado hace relativamente pocos años por Cantor y Dedekind, quedan excluidos de su teoría la casi totalidad de los números irracionales.
En la "Aritmética universal" da Newton una definición general de número que incluye al natural, fraccionario, racional e irracional. Esta definición tuvo un éxito sorprendente, y así se lee en muchos textos de Aritmética; "número es el resultado de la comparación de la cantidad con la unidad, se obtiene el número entero cuando la unidad cabe exactamente en la cantidad, el fraccionario cuando esta contiene exactamente una parte alícuota de la unidad, y el irracional cuando la cantidad y la unidad son inconmensurables entre sí."
Se cree que J. Wallis (1616-1703) fue el primer matemático que observa que el número decimal de infinitas cifras no periódicas es irracional. Hacia el año 1860, la necesidad de dar fundamento más riguroso al Cálculo Infinitesimal, obligó a los matemáticos a establecer de un modo más claro y preciso el concepto de número irracional y las operaciones aritméticas con los números reales.
Históricamente, los números imaginarios aparecen por primera vez en 1545 cuando el matemático italiano Jerónimo Cardano publica en Núremberg la fórmula general para la resolución de ecuaciones de tercer grado (robada según parece a Tartaglia). Esta fórmula se aplica para resolver ecuaciones de la forma
$x^3 + px + q = 0$; en ella aparece bajo el signo de raíz cuadrada la expresión: $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$, que cuando es negativa no permite hallar la solución x de la ecuación cúbica. Sin embargo, existen ecuaciones de este tipo que tienen soluciones reales, como por ejemplo $x^3 -15x - 4 = 0$.
Esta situación contradictoria fue durante mucho tiempo un "dolor de cabeza" para los algebristas, hasta que el matemático e ingeniero italiano Rafael Bombelli en su obra

Álgebra publicada en 1572, comenzó a desarrollar una teoría de los números complejos para resolverla y definió las reglas de las operaciones con estos números, pero no supo dar ninguna interpretación concreta a los radicales de números negativos. Para él no fueron más que símbolos auxiliares, imaginados para comprender mejor un problema matemático que denominó *"números sofísticos"* (El nombre de *imaginarios* de los da más tarde Descartes).

Sin embargo estas ideas, momentáneamente, no siguieron desarrollándose al haber encontrado el matemático francés Francois Vietta (1540-1603) la forma de resolver geométricamente la ecuación cúbica con discriminante negativo. Después de esto, Abraham Moivre en 1807, expone fórmulas sobre las potencias y raíces de los números imaginarios y reales en forma trigonométrica.

No obstante todo el trabajo anteriormente mencionado, los números imaginarios no fueron aceptados en forma general hasta que fueron usados ampliamente por Leonardo Euler (1709-1783), (a quien se le atribuye haber introducido la notación ***i*** para la $\sqrt{-1}$ en 1777; y por Carlos Federico Gauss en 1832, a quien se debe la denominación de números complejos para los números imaginarios junto con los reales. Pero es al irlandés Sir William Hamilton a quien se debe el desarrollo en forma lógica del concepto de número complejo en un trabajo publicado en 1853 (tres siglos después de que aparecieran por primera vez).

La dificultad de desarrollar en el hombre su facultad de abstracción lo prueba la historia del cero y del número negativo. La palabra cero (de origen árabe *(sifr = vacío),* fue introducida hacia fines del siglo XV, y el uso del cero como número se aceptó solo desde el siglo XIII por Fibonacci , quien lo tomó de la escuela arábiga española. Los hindúes en su célebre numeración decimal, usaban el cero como hueco.

Hasta el siglo XVII no fueron aceptados sin discusión los números negativos; los griegos nunca consideraron como solución de un problema una cantidad negativa o irracional.

Tratamiento de los diferentes dominios numéricos en la escuela cubana

En la construcción de los diferentes dominios numéricos se pueden seguir varias vías pero una de las más aceptadas, debido especialmente a su gran valor didáctico, es la vía genética en la cual cada dominio numérico se obtiene como ampliación del anterior.

Al construir cada nuevo dominio numérico, debe tenerse en cuenta el Principio de Permanencia de las Leyes Formales enunciado así por Hankel:

"Al generalizar un concepto se debe tratar de conservar el mayor número de propiedades, y al nuevo concepto debe corresponder como caso particular, el anterior."

Como hemos visto anteriormente, los números naturales son los primeros que surgen en las distintas civilizaciones, ya que las operaciones de contar y de ordenar son las más elementales que se pueden realizar.

En los números naturales (N), están definidas las operaciones de adición y multiplicación. Además, el resultado de adicionar o multiplicar dos números naturales es también un número natural, por lo que se dice que son operaciones internas. Estas operaciones cumplen las propiedades asociativa, conmutativa y la

distributividad de la multiplicación respecto a la adición. También se define en los naturales una relación de orden.
Sin embargo, este dominio posee la insuficiencia de que no siempre pueden realizarse las operaciones inversas de las definidas en él, como son la sustracción para la adición y la división para la multiplicación.
La división no es una operación interna en N, pues el cociente de dos números naturales puede no ser un número natural (no lo es cuando el dividendo no es múltiplo del divisor).
Esta insuficiencia de los números naturales se resuelve con la ampliación de este dominio al de los fraccionarios (Q_+), donde siempre es posible realizar las operaciones de adición, multiplicación y la división (salvo por cero) y donde las ecuaciones ax = b con a,b $\in$ Q_+, a $\neq$ 0 tienen siempre solución.
Las operaciones definidas en Q_+ cumplen las mismas propiedades que cumplían en N y en este nuevo dominio también se define un orden. Si observamos que los números naturales se comportan como las fracciones particulares cuyo denominador es 1, podemos considerar que el nuevo dominio contiene al anterior ($a = \frac{a}{1}$) con lo que se cumple el Principio de Permanencia enunciado anteriormente.
La sustracción tampoco es una operación interna en Q_+ , pues la diferencia de dos números fraccionarios puede no ser un número fraccionario (no lo es cuando el sustraendo es mayor que el minuendo). Esta insuficiencia de este dominio se resuelve con la introducción de los números racionales (Q), que contiene a los números negativos y donde son internas las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división (salvo por cero); y toda ecuación de la forma x+ b = a con a,b $\in$ Q tiene solución.
En este nuevo dominio se mantienen también las propiedades de las operaciones adición y multiplicación y existe un orden; además, contiene como subconjunto a las fracciones positivas que se pueden identificar con los números fraccionarios y, en particular, los números negativos cuyo denominador es 1 constituyen, con los naturales, el dominio de los enteros (Z).

En la construcción de cada nuevo dominio numérico hemos partido siempre de ciertas insuficiencias del dominio numérico anterior, en este caso los números racionales presentan como insuficiencias el hecho de que la diagonal de un cuadrado, si se toma el lado como unidad, no puede tener como medida un número racional; además, el cuadrado de un racional no puede ser 3, 5, 7 ...

Se debe entonces encontrar un dominio en el cual toda ecuación de la forma $x^n - a = 0$ con a>0 tenga solución. Tal dominio recibe el nombre de Números Reales (R).
A diferencia de los naturales y de los enteros, los números racionales no están colocados de manera que se puedan ordenar de uno en uno. Es decir, no existe “el siguiente” de un número racional; pues entre dos números racionales cualesquiera hay infinitos, de modo que si se representan sobre una recta, ésta queda densamente ocupada por ellos: si tomamos un trozo de recta, un segmento, por pequeño que sea, contiene infinitos números racionales. Sin embargo, entre dos de

estos números densamente situados sobre la recta existen también otros infinitos puntos que no están ocupados por racionales, son los Números Irracionales.
El conjunto formado por todos los números racionales y los irracionales es el de los números reales, de modo que todos los números mencionados hasta ahora (naturales, enteros, racionales, irracionales) son reales. Estos números ocupan la recta numérica punto a punto, por lo que se llama recta real. En el conjunto de los números reales están definidas las mismas operaciones que entre los racionales (adición, sustracción, multiplicación y división (salvo por cero)) y en ellas se conservan las propiedades y el orden Con la introducción de este nuevo dominio las ecuaciones de la forma $x^2 - a = 0$ con $a \in R$, $n \in N$, $a > 0$, tienen solución.
El producto de un número real por sí mismo es siempre positivo o cero, por lo que la ecuación $x^2 = -1$ no tiene solución en el conjunto de los números reales. Si se quiere dar un valor a la x que satisfaga esta ecuación, éste no puede ser un valor real y se hace necesario ampliar de nuevo este dominio, ahora al de los complejos (C).
La ampliación del dominio de los números reales a los complejos se hace con la simple adjunción de la unidad imaginaria **i** tal que $i^2 = -1$ y definiendo a los números complejos como aquellos que tienen la forma $a + bi$, donde a y b son números reales. Las operaciones definidas en este nuevo conjunto numérico conservan las propiedades de las operaciones del dominio de los reales pero al pasar a este nuevo dominio se pierde el orden, pues C no es un conjunto ordenado.
Aquellos números complejos donde $b \neq 0$, se denominan imaginarios. Por ejemplo, 3 + 4i, 2i, -5 + $\sqrt{3}$i. Si $a = 0$ y $b \neq 0$ se denominan imaginarios puros, como son 2i, -8i, etc.
Si $b = 0$ el número queda de la forma $a + 0i$, y este subconjunto de los números complejos se identifica con el de los números reales lográndose así una ampliación de los números reales que cumple con el Principio de Permanencia de las Leyes Formales enunciado anteriormente.
Los números complejos se suelen representar geométricamente siguiendo el esquema creado casi al mismo tiempo por O. Wessel (1798), C.F. Gauss (1799) y J. R Angard (1806), que consiste en representar el número complejo $z = a + bi$ por el punto del plano de coordenadas cartesianas rectangulares (a , b). Así la parte real de z es la abscisa a del punto y la parte imaginaria su ordenada b. De este modo se establece una correspondencia biunívoca entre los números complejos y los puntos del plano
En la enseñanza de los números naturales, no se hace una construcción como tal, todo este trabajo que abarca del primero al quinto grado se realiza de forma intuitiva, abordándose su carácter de conjunto infinito, el orden y las operaciones.
Desde los primeros años de su vida, en el círculo infantil, el niño compara conjuntos de hasta tres elementos y conoce que el que tiene menos es el que consiste de uno solo. Sabe cuál tiene más y cuál tiene menos.
En la escuela primaria se le enseñan los números naturales por la vía de comparación de conjuntos en primer grado, aprende a realizar las diferentes operaciones con ellos y los compara en la recta numérica. En quinto grado, comienzan a trabajar con los fraccionarios en las notaciones de fracción y decimal y a representarlos en la recta numérica.

Con estos dos dominios numéricos trabajan hasta el 7. Grado, donde se introducen los números enteros (Z) como el conjunto formado por los naturales y sus opuestos, y los racionales (Q) como los fraccionarios y sus opuestos. Aprenden a efectuar las diferentes operaciones con estos nuevos números y se les muestra que con ellos no es posible aún “cubrir” la recta numérica y que existen números que no son racionales como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc. De este modo, se les hace conocer que existe otro dominio numérico más amplio, el de los reales (que necesitarán para poder representar funciones).

En octavo grado se introducen los números irracionales (I) como los que se representan mediante expresiones decimales no periódicas. Posteriormente, se definen los números reales como el conjunto formado por los racionales y los irracionales.

En este grado, se presenta ya la idea de dominio numérico planteando que: “*Los conjuntos numéricos con las operaciones y relaciones definidas en ellos es lo que se conoce como dominios numéricos”* y se precisa que los irracionales no constituyen un dominio numérico. El estudio de los diferentes dominios numéricos concluye en preuniversitario cuando en 12. Grado se tratan los números complejos.

Conclusiones

1- Como hemos visto, las Matemáticas se han desarrollado siguiendo un proceso evolutivo histórico de la realidad. Al hombre, en su vida práctica se le presentó el problema de contar y con ello surge el concepto de número natural, al necesitar medir se percata de que no le son suficientes los números que conoce y crea las fracciones para resolver ese problema. Cuando se comienza el comercio, con el trueque, reconoce que no le son suficientes las fracciones y, aunque no de una manera formal, comienza a operar con los números negativos (con los créditos y las deudas). Al avanzar en el estudio de las Matemáticas se le presentan diferentes problemas que lo llevan a través de un largo proceso de abstracciones a ampliar los dominios conocidos hasta llegar a los reales y los complejos; tratando de mantener la mayor cantidad posible de propiedades que se cumplían en el dominio anterior y de forma tal que este estuviera contenido en el nuevo.

2- En las diferentes ampliaciones de los dominios numéricos que se efectúan se cumple con el Principio de Permanencia de las Leyes Formales enunciado por Hankel

3- A través del paso por todos los grados de la Enseñanza General el estudiante cubano se apropia de los conceptos fundamentales de los diferentes dominios numéricos y sus limitaciones adquiriendo habilidades en la operatoria con los mismos.

Referencias bibliográficas

Análisis Matemático J.R. Pastor...(et al)._ La Habana. Edición Revolucionaria. (1967)

Bell, E. T. “Los Grandes Matemáticos” archivo con dirección URL: http://www.geocities.com/grandesmatematicos/index.html

Casanova, Gastón. La Matemática y el Materialismo Dialéctico._ La Habana. Editora Nacional de Cuba. (1965)
Courant, R.¿ Qué es la Matemática?/ R. Courant, H. Robbins.?._Madrid. Ediciones Aguilar. (1965)

González, Mario. Introducción al Análisis Matemático. / Matanzas, Imprenta Baraní. (1940)
Leal Acosta, Mercedes y otros, Estructuras algebraicas y polinomios , Ciudad de la Habana. (2016)
Ruiz Zúñiga, Ángel, “Libro de Historia de la Matemática”, con dirección URL:http://cimm.ucr.ac.cr/aruiz/libros/Historia%20y%20Filosofia/Secciones/List, GLógica, teoría de conjuntos y dominios numéricos. Primera parte. Editorial Pueblo y Educación. (1982) Matemática duodécimo grado (1991): libro de texto/ Luis Campistrous...(et al)._La Habana, Ed. Pueblo y Educación. ¡
Matemática octavo grado. libro de texto/ Susana Acosta...(et al)._La Habana, Ed. Pueblo y Educación. (2014)
Matemática séptimo grado. Libro de texto/ Susana Acosta...(et al)._La Habana, Ed. Pueblo y Educación. (2013)
Ridnikov, K. Historia de las Matemáticas/ Moscú, Ed. MIR. (1989)
The MacTutor History of Mathematics archive con dirección URL: http://www.gap-system.org/~history/
Wussing, H. Conferencias sobre Historia de las Matemáticas/ La Habana, Ed. Pueblo y Educación. (1990)