

Algunas tendencias en el estudio del cálculo diferencial e integral

Some tendencies in the study of the differential and integral calculation

Dr. C. José Benito Rodríguez Sosa. Profesor Titular, Universidad de Ciencias Pedagógicas “Enrique José Varona”, La Habana, Cuba.

Correo: josebenitors@ucpejv.edu.cu

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4266-0555>

MSc. Amilcar Rojas Taño. Profesor Auxiliar. Universidad de Ciencias Informáticas, La Habana, Cuba.

Correo: amilcar@uci.cu

ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7851-1124>

Recibido: septiembre de 2021

Aprobado: enero de 2022

Resumen

Los resultados obtenidos en la formación de ingenieros, en lo que respecta al aprendizaje del cálculo diferencial, no han sido en todos los casos los esperados. El nivel de eficiencia y calidad en su proceso de formación no ha alcanzado los indicadores que se esperaban. Se reflexiona en este trabajo sobre diferentes tendencias en el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo diferencial e integral con el objetivo de seleccionar la vía más apropiada (o elaborar una nueva vía) que permita mejorar la formación de ingenieros en la Carrera de Ciencias Informáticas.

Palabras clave: Cálculo diferencial, cálculo integral, enseñanza, aprendizaje, tendencias.

Abstract

The results obtained in the formation of engineers, in what concerns to the learning of the differential calculation, have not been in all the cases the prospective ones. The level of efficiency and quality in their formation process have not reached the indicators that were expected. It is meditated in this work on different tendencies in the development of the process of teaching-learning of the differential and integral calculation with the objective of selecting the most appropriate (or to elaborate a new road) road that allows to improve the formation of engineers in the Career of Computer Sciences.

Keywords: Differential calculation, integral Calculation, teaching, learning, tendencies.

Introducción

Es innegable el papel decisivo que juega la Matemática en el desarrollo de las sociedades actuales. El rápido crecimiento de las ciencias y las tecnologías exige la formación de profesionales con competencias matemáticas y científicas para afrontar los nuevos retos que impone un mundo más globalizado y competitivo.

Desde esta perspectiva, la educación superior juega un rol primordial en el desarrollo social, cultural y económico del país, por tanto, requiere de profesionales altamente calificados, tal en el caso de los ingenieros, a los que se exigen sólidos conocimientos matemáticos y que sean competitivos en el ámbito nacional e internacional para hacer frente al proceso de globalización.



Para lograr la formación de estos profesionales es necesario “(...) replantear el modo en que se ha venido enseñando esta ciencia, con el propósito de lograr que los estudiantes tengan la capacidad para ser creativos, innovadores y razonar en torno a la solución de problemas ingenieriles” (Iglesias, Alonso y Gorina, 2017, p. 661).

En ese sentido, Abreu (2015) afirma que “(...) los contenidos de la asignatura deben ser abordados de manera tal que se cumplan con las exigencias de la formación del profesional en su contexto con la necesaria utilización de las TIC, (...)” (p. 4).

Por su parte, Zúñiga (2007) plantea que “utilizando un escenario contextualizado, el funcionamiento cognitivo de los estudiantes propicia una mejor comprensión de los contenidos de cálculo en el ámbito de su área de especialidad” (p. 170).

Se concuerda con los autores anteriores en que es necesario buscar alternativas con el fin de formar un egresado capaz de resolver los problemas de la profesión mediante sus modos de actuación, pero que además responda a las necesidades actuales de la sociedad y a los avances de la ciencia contemporánea, en especial en el campo de las ciencias informáticas, es lo que necesita el país en los momentos actuales.

De manera particular, el cálculo diferencial e integral está presente en los planes de estudio de las carreras de ingeniería. A pesar de su importancia para el desarrollo de las profesiones ingenieriles, se manifiestan numerosas dificultades en su PEA.

Diversos autores aseguran que los mayores problemas están, fundamentalmente en la formación conceptual, apreciándose un fuerte predominio de la comprensión instrumental y evidenciándose insuficiencias en su concepción didáctica. Otros afirman que las principales causas están en la gran cantidad de estudiantes en las aulas de esta asignatura, la falta de motivación por su estudio y la predominante tendencia a una enseñanza tradicional.

De igual forma, Iglesias et al. (2017), muestran un estudio diagnóstico realizado con estudiantes de la carrera de Ingeniería Civil de la Universidad de Oriente, en Santiago de Cuba, que incluyó el análisis de los resultados de todas las asignaturas de la disciplina de Matemática de dicha carrera, concluyéndose que en todas se presentan insuficiencias en cuanto al dominio de los contenidos y empleo de estrategias heurísticas y metacognitivas. También se concluyó que los porcentajes de promoción más bajos y de peor calidad los exhiben las asignaturas matemáticas de cálculo diferencial e integral.

La experiencia como docente en la UCI ha posibilitado establecer que, cuando los estudiantes arriban a la misma, tienen deficiencias en temas fundamentales de la matemática como el manejo de operaciones básicas con números reales, análisis e interpretación de problemas, no poseen un adecuado conocimiento de temas relacionados con la geometría y la trigonometría, que son importantes al momento de abordar los contenidos relacionados con funciones.

Se reflexiona en este trabajo sobre diferentes tendencias en el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo diferencial e integral con el objetivo de seleccionar la vía más apropiada (o elaborar una nueva vía) que permita mejorar la formación de ingenieros en la Carrera de Ciencias Informáticas.

Desarrollo

En la carrera de Ingeniería en Ciencias Informáticas se estudia el cálculo diferencial en la asignatura Matemática I en el segundo semestre de primer año y el cálculo integral en la asignatura Matemática II en el primer semestre de segundo año.



En ambas asignaturas el texto básico que se utiliza es “Calculo con Transcendentes Tempranas” de James Stewart, cuarta edición.

A criterio del autor de la tesis constituye un buen libro como guía para orientar el aprendizaje del cálculo diferencial e integral. En diversos ejercicios relacionados con aplicaciones en diferentes áreas del conocimiento humano como la física, la química, la biología, la economía y otras ciencias se utilizan asistentes matemáticos. Esto propicia la planificación de su empleo en las clases de las dos asignaturas, aspecto que contribuye a motivar a los estudiantes y reduce la complejidad de los procedimientos de cálculo.

Un concepto básico y trasversal en los currículos para la formación de ingenieros, matemáticos y para otras ciencias lo constituye la derivada de una función, por ser uno de los elementos centrales y estructurales de cualquier curso de cálculo, además, es una herramienta fundamental en el estudio y comprensión de fenómenos que involucran el cambio o variación de magnitudes.

En opinión de este trabajo, un factor que dificulta el correcto aprendizaje del concepto de derivada lo constituye la falta de conocimientos previos de los estudiantes en los conceptos de función, límite y continuidad. De esta manera:

(...) el alumno no podrá entender apropiadamente el concepto de derivada y posiblemente solo se quede en la parte operativa de calcular derivadas sin darse cuenta que la derivada de una función es una potente herramienta matemática que se usa para resolver problemas de la vida cotidiana. (Pineda, 2014, p. 2)

Según Dolores (2000) la orientación y enseñanza del concepto de derivada, han estado marcados por dos tendencias:

- Tendencia clásica formal, caracterizada por la estructura del Análisis Matemático para finalmente buscar sus aplicaciones.
- Tendencia desde la resolución de problemas, donde los conceptos se forman a partir de la actividad matemática, referida a la determinación de tangentes o de su significado físico.

Estas tendencias se manifiestan mediante enfoques que priorizan la estructura del contenido tales como: algebraico, numérico, formal, infinitesimal, aproximación afín local para la primera tendencia, así como geométrico, variacional y computacional para la segunda tendencia.

Desde el punto de vista del autor la resolución de problemas, por su importancia, ha sido creciente en el desarrollo del PEA del cálculo diferencial e integral en los últimos años. Así se manifiesta en la forma en que se ha venido realizando el proceso y en diversos libros de cálculo que tienen sus influencias en cómo se perciben, conciben, enseñan y se aprenden los conceptos, su significado, teoremas, propiedades y aplicaciones en el contexto del aula o fuera de él.

(...) se debe reconocer la influencia que han tenido los textos de estudio en la forma en la que se ha desarrollado el currículo de matemática al enseñar el cálculo diferencial. Si en un primer momento estuvo marcado por una línea más próxima al Análisis Matemático, hoy en día se aprecia una postura distinta y más abierta a producir innovaciones en su enseñanza. (Irazoqui, 2015, p. 230)

Se refiere este último autor a que las propias universidades elaboran diversos materiales para facilitar su estudio, “(...) que si bien es cierto no representan un texto de estudio en sí, al menos, sirven de base para apoyar el PEA (...)” (Irazoqui, 2015, p. 230).

En la carrera de Ingeniería en Ciencias Informáticas la línea que se sigue para introducir el concepto de derivada es ir preparando en primer lugar el problema de hallar la recta tangente. La determinación de las



pendientes de las rectas secantes como aproximación a la pendiente de la recta tangente, es lo que conlleva a la solución de este problema geométrico y, da paso, a la noción de la derivada. Luego se define la derivada de una función f en un valor “ a ”, que denota como $f'(a)$ como el límite del cociente de Newton, a saber:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ siempre que este límite exista.}$$

Como la tecnología cobra cada día más interés debido a su extraordinario desarrollo, las computadoras han hecho realidad la posibilidad de la visualización dinámica del comportamiento gráfico de las funciones, de observar mediante simulaciones iterativas cómo la sucesión de secantes tiende a la tangente de racionalizar considerablemente el trabajo con los métodos numéricos.

El uso del GeoGebra permite realizar dicho proceso al ofrecer recursos para la graficación, visualización y los procesos de aproximación contribuyendo a una mejor comprensión del contenido, lo que constituye una idea de la alternativa didáctica que se propone.

Durante todo el desarrollo del cálculo diferencial se trabaja con la derivación de funciones empleando las reglas; incluyendo la regla de la cadena, la derivación implícita, la derivada de la función inversa, entre otras, hasta llegar al tratamiento de las aplicaciones de la derivada.

Por otra parte, la temática central del cálculo integral viene dada por el problema del área que se utiliza para formular la idea de la integral definida, sin embargo, su estudio en la carrera comienza después del estudio del cálculo integral por la obtención de primitivas dando paso a la integración indefinida, definida e impropias empleando métodos de integración, concluyendo con las aplicaciones de la integración.

De igual forma, visualizar mediante un asistente matemático para lograr comprender como se construye el concepto de la integral definida de una función como el área bajo la curva de la misma, donde el verdadero propósito es obtener aproximaciones cada vez más precisas, permite transmitir al estudiantado la dinámica del concepto. Cabe notar que los docentes introducen el concepto en forma expositiva haciendo uso del libro principal de la asignatura donde se aprecia mejoras en su presentación con gráfico, pero son estáticos.

En la Facultad de Matemática-Computación de la Universidad de La Habana uno de los libros que se utiliza en el PEA del cálculo diferencial e integral es el texto “Análisis de funciones de una variable” de Concepción Valdés Castro y Carlos Sánchez Fernández.

Valdés y Sánchez (2014) introducen el estudio de la noción de la derivada de una función analizando dos problemas, uno geométrico (tangente a una curva plana) y otro físico (velocidad en un movimiento rectilíneo). Son dos problemas análogos y difieren solo por la interpretación que se adjudica a la función considerada. En ambos casos se trata del límite de la relación entre el incremento de los valores de la función y el incremento de la variable independiente, cuando este último tiende a cero. Para ambos autores la resolución de problemas concretos es de capital importancia en el análisis del problema inverso a la derivación.

Otros autores como Apostol (1990), Huges et al. (1999), Hamel y Amiotte (2007) introducen la derivada utilizando un problema físico. El ejemplo le sirve de base para definir de manera general la derivada como el límite de la variación media entre “ x ” y “ $x + h$ ”. Así, la derivada $f'(x)$ está definida como: $\lim [f(x + h) - f(x)] / h$, con h tendiendo a cero. Con esta definición pone de manifiesto que la velocidad instantánea $v(t)$ es un ejemplo del concepto de derivada.

En la formación de profesores de Matemática en Cuba se trabaja por abordar estos temas mediante:

(...) la organización del contenido en función de propiciar la organización del conocimiento matemático del estudiante a partir de los conceptos rectores: límite, continuidad, derivabilidad e



integral definida de funciones reales, mediante condiciones necesarias, suficientes y, necesarias y suficientes. Esta estructuración posibilita poner al descubierto las regularidades del Análisis Matemático (...). (Jiménez, 2010, p. 11)

Una característica de este enfoque es que, para la realización de las actividades de aprendizaje, se le brinda al estudiante un conjunto de estrategias tanto cognitivas como metacognitivas que se recomiendan utilizar en el proceso de resolución de las mismas.

Esta forma invariante de organizar los contenidos del Análisis Matemático garantiza una continua sistematización de los saberes que el estudiante va construyendo, al contar con un referente -a partir de esta organización- en la comunicación, tanto del profesor con sus estudiantes como entre los estudiantes y del estudiante consigo mismo. Referente que resulta indispensable para coordinar las acciones de identificación, selección y aplicación de los conocimientos, tanto en ejercicios como en problemas. (Jiménez, 2010, p. 11)

Otra de las peculiaridades actuales en el estudio del cálculo diferencial e integral es la contextualización desde una integración disciplinar.

Carvajal (2010) considera que la integración disciplinar es parte fundamental de la flexibilización curricular y persigue formar profesionales más universales, aptos para afrontar los rápidos cambios de las competencias y los conocimientos; con una formación más humanística y ambiental, con ética, conciencia de equidad social y juicio crítico, que actúen como agentes de cambio social, dada la importancia de su trabajo para mejorar la calidad de vida de la población.

Camarena (2008), Abreu (2015), entre otros autores han trabajado en esa corriente.

Camarena (2008) tiene una propuesta didáctica en la enseñanza de la Matemática en las carreras de ingeniería, que denominó “Matemática en Contexto de las Ciencias”. En ella se lleva al estudiante a trabajar con un cálculo diferencial e integral contextualizado en las áreas del conocimiento de su futura profesión, en actividades de la vida cotidiana y en actividades profesionales y laborales, todo ello a través de eventos contextualizados, los cuales pueden estar presentes en problemas o proyectos.

Trejo, Camarena y Trejo (2013) se refieren a que la estrategia parte del presupuesto de que el profesor debe involucrarse con contenidos de la carrera de ingeniería donde imparte clases, dado que será necesario que cuente, no solo con los conocimientos matemáticos, sino también con los conocimientos que el evento o problema a contextualizar requiera.

De lo antes expuesto se infiere el desarrollo de metodologías de trabajo en equipos que conlleve integrar disciplinas, de manera que puedan contribuir al desarrollo de habilidades, conocimientos valores, prácticas, que permita resolver los problemas ingenieriles actuales.

Por otra parte, Abreu (2015) presenta una propuesta didáctica para la resolución de problemas contextualizados y la integración de las TIC en el PEA del cálculo diferencial e integral en la carrera de Ingeniería Financiera en la Universidad Politécnica del Golfo de México. Así refiere que:

“La resolución de problemas contextualizados en el PEA de la asignatura cálculo diferencial e integral exige que los profesores dirijan dicho proceso de modo que los estudiantes sean el centro” (Abreu, 2015, p. 26).

Al respecto, Godino (2010) afirma: “Mediante su uso, el estudiantado debería potenciar ciertas habilidades tales como: razonamientos más adecuados, la persistencia, la curiosidad y el logro de mayor confianza para enfrentar situaciones no rutinarias, que trascienden incluso el ámbito escolar”. (p. 6).



Hoy en día se utilizan diversas herramientas tecnológicas para facilitar el PEA de las matemáticas y por lo tanto se impone un cambio con respecto a la enseñanza tradicional. Existen diversas experiencias, como la de la formación de ingenieros en la Universidad Tecnológica de la Habana en la que predomina el empleo de las tecnologías, especialmente con la plataforma Apendist.

Conclusiones

El análisis realizado evidencia diferentes tendencias en el tratamiento del cálculo diferencial e integral:

- estructuración del sistema de conocimientos teóricos como parte del Análisis Matemático y ejemplificación de sus aplicaciones en otras ciencias y en la vida cotidiana
- introducción y tratamiento de los aspectos teóricos a partir de problemas propios de la especialidad en la que se estudian estos temas.
- tratamiento que considera un problema geométrico, un problema físico o ambos para introducir los conceptos básicos del tema
- el tratamiento del contenido en función la organización del conocimiento matemático del estudiante a partir de los conceptos rectores mediante condiciones necesarias, suficientes y, necesarias y suficientes.
- el protagonismo de las TIC para la introducción de los conceptos esenciales y para la resolución de ejercicios del tema y de problemas propios de la especialidad.

Bibliografía

- Abreu, L. A. (2015). El proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo diferencial e integral mediante la resolución de problemas contextualizados y la integración de las tecnologías de la información y las comunicaciones en la carrera de Ingeniería Financiera. (Tesis de doctorado). Universidad de Ciencias Pedagógicas “Enrique José Varona”. La Habana, Cuba.
- Apóstol, T. (1990). Cálculo. Volumen I. México: Editorial Reverté.
- Camarena, P. (2008). Un enfoque de las Ciencias en contexto desde la didáctica. *Innovación Educativa*, 6(31), 21-31. Recuperado de: <http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=179414894003>
- Carvajal, Y. (2010). Interdisciplinariedad: desafío para la educación superior y la investigación. *Revista Luna Azul*. 31 julio-diciembre 2010. ISSN 1909-2474. Universidad de Caldas Manizales, Colombia.
- Dolores C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. El futuro del cálculo infinitesimal. Capítulo V: ICME-8 Sevilla, España. Cantoral R. (Coord.). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Godino, J. (2010). Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina tecnocientífica. Universidad de Granada, España. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/perspectiva_ddm.pdf
- Hamel, J. y Amiotte, L. (2007). Calcul différentiel. Canadá: Édition du Renouveau Pédagogique Inc.
- Hughes, D. et al. (1999). Fonctions d'une variable. Traducción de: Calculus: Single variable, 2nd edition. Montréal: Chenelière/McGraw-Hill.



- Iglesias, N., Alonso, I. y Gorina, A. (2017). El Cálculo Diferencial e Integral en las carreras de ciencias técnicas. Especificidades de su enseñanza. Revista Electrónica para maestros y profesores, 14(4), 661. ISSN 1815-4867. Recuperado de: <https://www.researchgate.net/publication/321754079>
- Irazoqui, E. (2015). El aprendizaje del cálculo diferencial: Una propuesta basada en la modularización (Tesis de doctorado). Facultad de Educación. Departamento de didáctica, organización escolar, didácticas especiales. Recuperado de: e-spacio.uned.es/fez/view/tesisuned: Educacion-Esirazoqui
- Jiménez, M. H. (2010). Análisis Matemático en IR. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba.
- Pineda, C. E. (2014). Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de la derivada. Universidad Santos Tomás. Bogotá D C. Colombia, p. 2.
- Trejo, E., Camarena, P. y Trejo, N. (2013). Las matemáticas en la formación de un ingeniero: la matemática en contexto como propuesta metodológica. Revista de Docencia Universitaria, 11 (número especial, 2013), 397-424.
- Valdés, C. y Sánchez, C. (2014). Análisis de funciones de una variable. Facultad de Matemática y Computación. Universidad de La Habana. La Habana, Cuba.
- Zuñiga, L. (2007). El cálculo en carreras de ingeniería. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10(1), 170. Recuperado de: <http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v10n1/v10n1a7.pdf>

Declaración de conflicto de interés y conflictos éticos

Los autores declaramos que el artículo es original, no contiene elementos clasificados ni restringidos para su divulgación ni para la institución en la que se realizó y no han sido publicados con anterioridad, ni están siendo sometidos a la valoración de otra editorial.

Los autores somos responsables del contenido recogido en el artículo y en él no existen plagios, conflictos de interés ni éticos.

Contribuciones de los autores

Dr. C. José Benito Rodríguez Sosa: redacción del artículo, fundamentos teóricos, revisión de todo el contenido.

M.Sc. Amílcar Rojas Taño: redacción del artículo, fundamentos teóricos, diseño del artículo.

