

## El tratamiento metodológico de teoremas matemáticos con el uso de GeoGebra.

### *The didactic treatment of mathematical theorems with the use of GeoGebra*

Dr.C. María Cristina González Dosil. Profesora Titular del Departamento de Matemática-Física. Facultad de Educación en Ciencias Naturales y Exactas. Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona

ORCID 0000-0002-0044-7529.

E-mail: maríacgd@ucpejv.edu.cu

---

Recibido marzo 2020

Aprobado septiembre 2020

---

#### **Resumen**

Las dificultades en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática constituyen un problema global que abarca todos los niveles educacionales. El uso de las tecnologías de la información y la comunicación ofrece a los estudiantes la posibilidad de investigar y “descubrir” los contenidos matemáticos.

Las posibilidades que brinda GeoGebra hacen que sea ampliamente utilizado en el tratamiento de situaciones de aprendizaje de la Matemática escolar y superior.

Esta constituye una de las líneas de investigación del Proyecto Dulce María Escalona, que se gestiona desde el departamento de Matemática Física de la Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona.

En el presente artículo se aborda el primero de los procesos parciales del tratamiento de teoremas matemáticos: la obtención de la proposición. Mediante el uso de GeoGebra se presentan diferentes situaciones de aprendizaje y se utiliza el dinamismo que aporta el asistente para el análisis de las diferentes posibilidades que pueden presentarse. Finalmente el estudiante está en condiciones de identificar una regularidad y formular una conjetura.

Se presentan cuatro ejemplos, que ilustran el tratamiento didáctico de diferentes contenidos de los niveles medio básico y superior y de la formación universitaria de profesores de Matemática.

**Palabras clave:** Teoremas matemáticos, didáctica de la Matemática, tecnologías de la información y la comunicación, GeoGebra.

#### **Abstract**

Difficulties in the teaching-learning process of Mathematics constitute a global problem that encompasses all educational levels. The use of information and communication technologies offers students the possibility of investigating and "discovering" the mathematical knowledge.

The possibilities offered by GeoGebra make it widely used in the treatment of learning mathematics situation.

This constitutes one of the lines of research of the Dulce Maria Escalona Project, which is managed by the Department of Mathematics and Physic of the University of Pedagogical Sciences “Enrique José Varona”.

This article addresses the first of the partial processes of the treatment of mathematical theorems: obtaining the proposition. Using GeoGebra, is possible to present different learning situations and the dynamism provided by the wizard is used to analyze the different possibilities that may arise. Finally, the student is able to identify some regularities and formulate a conjecture. By mean four examples shows the didactic treatment of different contents of the school and of the university training of mathematics teachers.

**Keyword:** Mathematical theorems, didactic of Mathematics, information and communication technologies, GeoGebra.

## **Introducción**

La principal responsabilidad en la formación de las nuevas generaciones corresponde a la escuela, por consiguiente, concierne a los profesores convencer a sus estudiantes de la necesidad de adquirir los conocimientos necesarios para desenvolverse en la sociedad. Para ello la Matemática es indispensable; a pesar de los temores que frecuentemente genera esta disciplina, todos pueden ser capaces de aprenderla si descubren las vías que les resultan efectivas para ello.

La introducción de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) ha revolucionado el proceso de enseñanza aprendizaje (PEA) de la Matemática, pues ha impactado en todos los componentes de este proceso. Ello se concreta en el tratamiento de las situaciones típicas de la enseñanza de la Matemática, a saber: conceptos y sus definiciones, teoremas y sus demostraciones, sucesión de indicaciones de carácter algorítmico, construcciones geométricas y resolución de problemas.

En el departamento de Matemática Física de la Universidad de Ciencias Pedagógicas “Enrique José Varona” se desarrolla el proyecto de investigación institucional Dulce María Escalona. El uso de las TIC en el PEA de la Matemática, tanto en la formación de profesores de esta disciplina, como en los niveles medio y medio superior de educación, constituye una línea de investigación del referido proyecto.

En el artículo se analiza el tratamiento de teoremas, en especial su obtención, con el uso de las TIC y se presentan ejemplos de applets, que complementados con un sistema de orientaciones e impulsos, muestran cómo, mediante los asistentes matemáticos, los docentes pueden dirigir a los estudiantes hacia el descubrimiento de proposiciones que forman parte de la teoría que deben dominar para cumplir los objetivos previstos en el plan de estudios. Ellos forman parte de los resultados del proyecto en la mencionada línea de investigación.

## **Desarrollo**

El sistema de conocimientos matemáticos contenido en los programas escolares y en los correspondientes a la formación universitaria de profesores de Matemática, abarca el estudio de las situaciones típicas de la enseñanza de la Matemática, definidas como “(...) todas aquellas situaciones reales en la enseñanza de una o varias asignaturas, que poseen semejanza con respecto a determinados parámetros esenciales, especialmente, con respecto a la estructura de los objetivos y a la estructura objetivo-materia; por eso, estas situaciones que permiten un proceder semejante en la

aplicación de una determinada estrategia de conducción y de los procedimientos metodológico-organizativos.” (Zillmer, 1985:155).

Ellas son: tratamiento de los procedimientos de solución, de los conceptos matemáticos y sus definiciones, de los teoremas matemáticos y sus demostraciones, de ejercicios con texto y de aplicación y de las construcciones geométricas. (Ballester, 1992)

En el presente artículo se analiza el tratamiento de los teoremas y sus demostraciones. Este consta de dos procesos parciales: la obtención de la proposición y su demostración; en esta oportunidad nos dedicaremos al primero de ellos, especialmente en el caso de proposiciones geométricas. Resulta entonces imprescindible que el profesor deje clara la necesidad de la demostración para garantizar la validez de la proposición encontrada.

La introducción de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) ha revolucionado el proceso de enseñanza aprendizaje (PEA) de la Matemática, pues ha impactado en todos los componentes de este proceso.

Numerosas investigaciones han demostrado que el trabajo con los asistentes matemáticos favorece el aprendizaje de la Geometría, ya que reducen el tiempo de búsqueda, permiten analizar un mayor número de casos y por consiguiente, detectar regularidades y elaborar conjeturas; por otra parte contribuyen a elevar la motivación por esta rama de la Matemática.

En el departamento de Matemática Física de la Universidad de Ciencias Pedagógicas “Enrique José Varona” (UCPEJV) se desarrolla el proyecto de investigación institucional Dulce María Escalona. El uso de las TIC en el PEA de la Matemática, tanto en la formación de profesores de esta asignatura, como en los niveles medio y medio superior de educación, constituye una línea de investigación del referido proyecto.

Sin embargo, a pesar del trabajo que se desarrolla en esta disciplina no se han alcanzado aún los niveles deseados en los estudiantes. Se pretende que sean capaces de investigar de forma independiente diferentes situaciones geométricas, elaborar sus propias conjeturas y comprobar su validez mediante la demostración formal.

Es necesario continuar trabajando en el uso de métodos y medios de enseñanza que favorezcan la actividad productiva de los estudiantes a partir de potenciar su rol como sujeto central de su aprendizaje en el sentido de que se convierta en constructor de su conocimiento sobre la base de la reflexión derivada de su propio trabajo.

A la forma tradicional del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría se suma en la actualidad la llamada Geometría Dinámica, caracterizada por la posibilidad de dotar de dinamismo a las figuras, que pueden modificar su forma y posición, lo que potencia la aplicación de reglas heurísticas para la elaboración de suposiciones más generales que las que pueden obtenerse mediante las formas tradicionales.

Para esto se cuenta con diferentes asistentes entre los más utilizados se encuentran el Cabry Geometre, el Geómetra y más recientemente el GeoGebra. En este trabajo se pretende ilustrar cómo utilizar este último para la obtención de los teoremas de igualdad de triángulos.

GeoGebra es un software libre de matemática (bajo licencia GNU) que integra geometría, álgebra y cálculo. Ha sido desarrollado por Markus Hohenwarter en la

Universidad Atlántica de Florida (Florida Atlantic University) para la enseñanza de matemática escolar.

Es un sistema de geometría dinámica que consta de una ventana algebraica y una ventana geométrica que permiten establecer esta correspondencia para cada objeto. Permite realizar construcciones con puntos, vectores, segmentos, rectas, secciones cónicas y funciones que se pueden modificar dinámicamente. También brinda la posibilidad de ingresar ecuaciones y coordenadas directamente, de operar con matrices y polinomios, resolver ecuaciones y realizar estudios estadísticos. Estas características permiten a GeoGebra operar variables vinculadas a números, vectores y puntos y realizar el análisis de diferentes tipos de funciones.

En el proceso de obtención de teoremas, el principal aporte de la utilización del asistente GeoGebra radica en la visualización y el dinamismo, que contribuyen al análisis de objetos matemáticos en múltiples posiciones y perspectivas, la valoración de las modificaciones que se producen mediante la movilidad y la variación de condiciones, el análisis de casos particulares y casos límites, el establecimiento de relaciones y visualización simultánea de los objetos geométricos y su representación analítica; todo lo cual favorece la elaboración de conjeturas a partir de la obtención de regularidades como resultado del cumplimiento de determinadas premisas (experimentación matemática).

#### *Ejemplo 1*

##### *Obtención de los teoremas de igualdad de triángulos*

En la enseñanza Secundaria Básica se utilizan los movimientos del plano para construir figuras iguales; recíprocamente es posible afirmar la igualdad de dos figuras a partir de la existencia de un movimiento que transforme una de ellas en la otra, en particular, para que dos triángulos sean iguales, debe existir un movimiento que transforme uno en otro, de manera que sus ángulos interiores tengan respectivamente la misma amplitud y si los lados opuestos a estos ángulos tengan respectivamente la misma longitud.

Se recomienda analizar con los estudiantes interrogantes como:

- ¿Será necesario siempre, para demostrar la igualdad de dos triángulos, encontrar un movimiento que transforme uno en el otro?
- ¿Será necesario demostrar que sus tres lados y sus tres ángulos sean iguales?
- ¿Se podrá garantizar la igualdad de dos triángulos con un número mínimo de elementos respectivamente iguales? ¿Cuáles? ¿Cuántos?

La actividad que se propone consiste en hojas de trabajo en las que se indican a los estudiantes las actividades a realizar mediante el uso de GeoGebra, encaminadas a la elaboración de sus conclusiones con respecto a la igualdad de los triángulos que se presentan y finalmente a la obtención de los teoremas de igualdad de triángulos. Todas terminan con una interrogante dirigida al análisis de los resultados obtenidos en la práctica, lo cual entrena a los estudiantes en la elaboración de conjeturas.

La actividad puede realizarse por equipos, de modo que cada equipo desarrolle una hoja de trabajo y finalmente presenten las conclusiones a las que arribaron, que pueden servir de base para llegar a la formulación de los teoremas de igualdad de triángulos.

Hoja de trabajo 1: Actividades 1, 2, 3 y 6

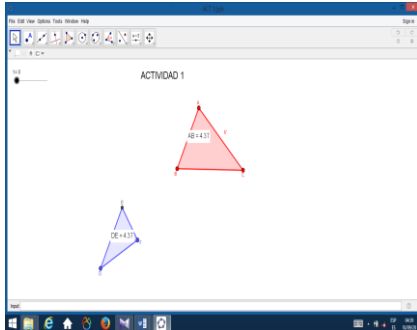
Hoja de trabajo 2: Actividades 1, 2, 4, 7 y 8

Hoja de trabajo 3: Actividades 1, 4, 5, 7 y 9

### Actividad 1

En la figura, para los triángulos ABC y DEF se cumple que  $\overline{AB} = \overline{DE}$

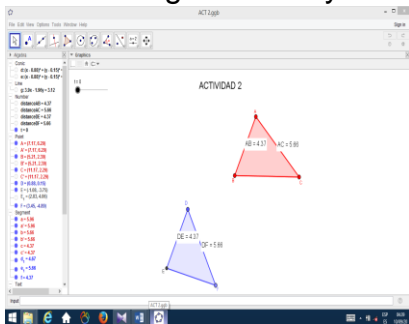
1. Mueve el deslizador t, ¿pueden superponerse ambos triángulos?
2. Desplaza los puntos del triángulo ABC y analiza qué ocurre.
3. ¿A qué conclusión puedes llegar con respecto a la igualdad de los triángulos ABC y DEF?



### Actividad 2

En la figura, para los triángulos ABC y DEF se cumple que  $\overline{AB} = \overline{DE}$  y  $\overline{AC} = \overline{DF}$

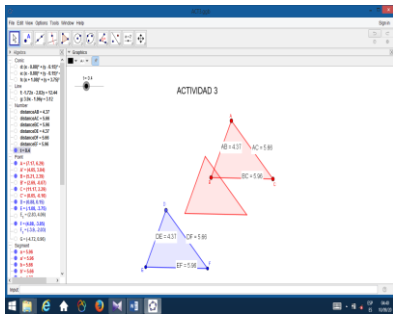
1. Mueve el deslizador t, ¿pueden superponerse ambos triángulos?
2. Desplaza los puntos del triángulo ABC y analiza qué ocurre.
3. ¿A qué conclusión puedes llegar con respecto a la igualdad de los triángulos ABC y DEF?



### Actividad 3

En la figura, para los triángulos ABC y DEF se cumple que  $\overline{AB} = \overline{DE}$ ,  $\overline{AC} = \overline{DF}$  y  $\overline{BC} = \overline{DF}$ .

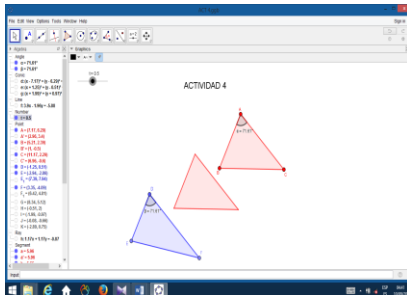
1. Mueve el deslizador t, ¿pueden superponerse ambos triángulos?
2. Desplaza los puntos del triángulo ABC y analiza qué ocurre.
3. ¿A qué conclusión puedes llegar con respecto a la igualdad de los triángulos ABC y DEF?



#### Actividad 4

En la figura, para los triángulos ABC y DEF se cumple que  $\angle BAC = \angle EDF$

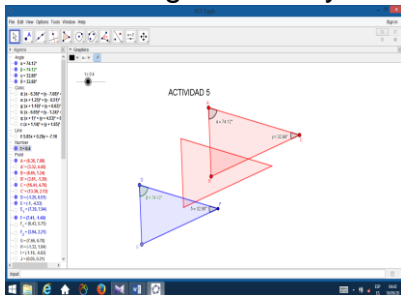
1. Mueve el deslizador t, ¿pueden superponerse ambos triángulos?
2. Desplaza los puntos del triángulo ABC y analiza qué ocurre.
3. ¿A qué conclusión puedes llegar con respecto a la igualdad de los triángulos ABC y DEF?



#### Actividad 5

En la figura, para los triángulos ABC y DEF se cumple que  $\angle BAC = \angle EDF$  y  $\angle ABC = \angle DEF$ .

1. Mueve el deslizador t, ¿pueden superponerse ambos triángulos?
2. Desplaza los puntos del triángulo ABC y analiza qué ocurre.
3. ¿A qué conclusión puedes llegar con respecto a la igualdad de los triángulos ABC y DEF?

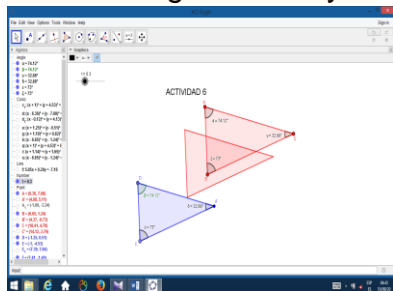


#### Actividad 6

En la figura, para los triángulos ABC y DEF se cumple que  $\angle BAC = \angle EDF$ ,  $\angle ABC = \angle DEF$  y  $\angle ACB = \angle DFE$ .

1. Mueve el deslizador t, ¿pueden superponerse ambos triángulos?
2. Desplaza los puntos del triángulo ABC y analiza qué ocurre.

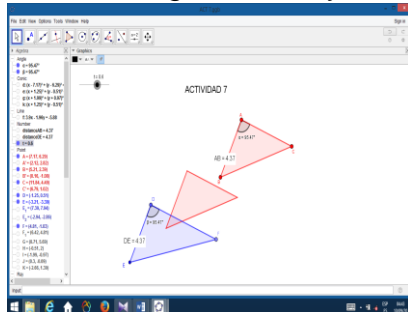
3. ¿A qué conclusión puedes llegar con respecto a la igualdad de los triángulos ABC y DEF?



### Actividad 7

En la figura, para los triángulos ABC y DEF se cumple que  $\angle BAC = \angle EDF$  y  $\overline{AB} = \overline{DE}$

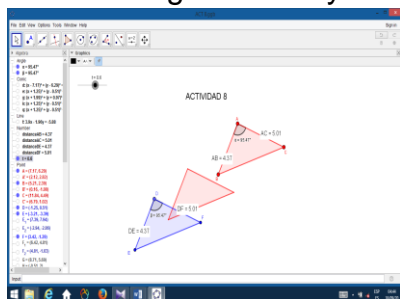
1. Mueve el deslizador t, ¿pueden superponerse ambos triángulos?
2. ¿A qué conclusión puedes llegar con respecto a la igualdad de los triángulos ABC y DEF?



### Actividad 8

En la figura, para los triángulos ABC y DEF se cumple que  $\angle BAC = \angle EDF$ ,  $\overline{AC} = \overline{DF}$  y  $\overline{AB} = \overline{DE}$

1. Mueve el deslizador t, ¿pueden superponerse ambos triángulos?
2. Desplaza los puntos del triángulo ABC y analiza qué ocurre.
3. ¿A qué conclusión puedes llegar con respecto a la igualdad de los triángulos ABC y DEF?



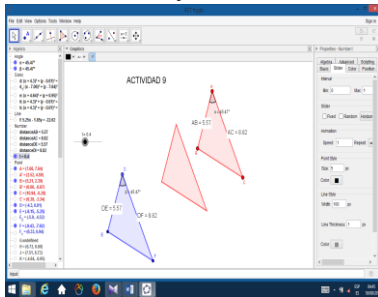
### Actividad 9

En la figura, para los triángulos ABC y DEF se cumple que  $\angle BAC = \angle EDF$ ,  $\angle ABC = \angle DEF$  y  $\overline{AB} = \overline{DE}$ .

1. Mueve el deslizador t, ¿pueden superponerse ambos triángulos?
2. Desplaza los puntos del triángulo ABC y analiza qué ocurre.



3-¿A qué conclusión puedes llegar con respecto a la igualdad de los triángulos ABC y DEF?



Finalmente, cada uno de los equipos expone sus resultados y es posible completar una tabla como la siguiente, a partir de la cual los estudiantes estarán en condiciones de formular las proposiciones que obtuvieron. Es necesario precisar la necesidad de la demostración formal de cada una de ellas para garantizar su veracidad.

		Pares de lados iguales			
		0	1	2	3
Pares de Ángulos iguales	0	-	-	-	III
	1	-	-	lal	-
	2	-	ala	-	-
	3	-	-	-	-

**Ejemplo 2**

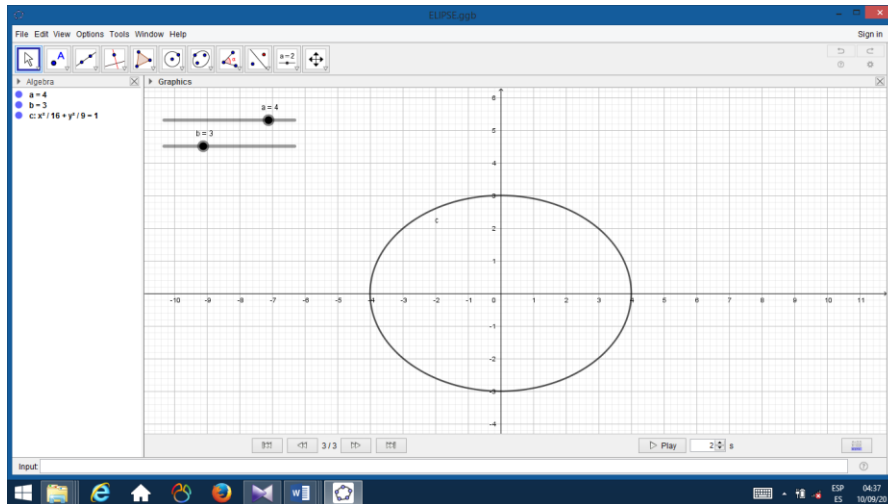
*Análisis de las características de la elipse según las longitudes de sus semiejes.*

El estudio de las secciones cónicas se desarrolla en 11º grado. En este grado los estudiantes están en condiciones de elaborar sus propios applets y realizar los análisis que sugieren los problemas que se les plantean para elaborar sus propias conjeturas. En el ejemplo que se presenta los estudiantes deben introducir deslizadores para los valores de a y b, los que utilizarán para variar las condiciones del problema según se solicita, en función de las cuales analizarán los tres casos presentados.

Representa la elipse de ecuación  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  y analiza qué ocurre cuando:

- a)  $a = b$
- b)  $a > b$
- c)  $a < b$



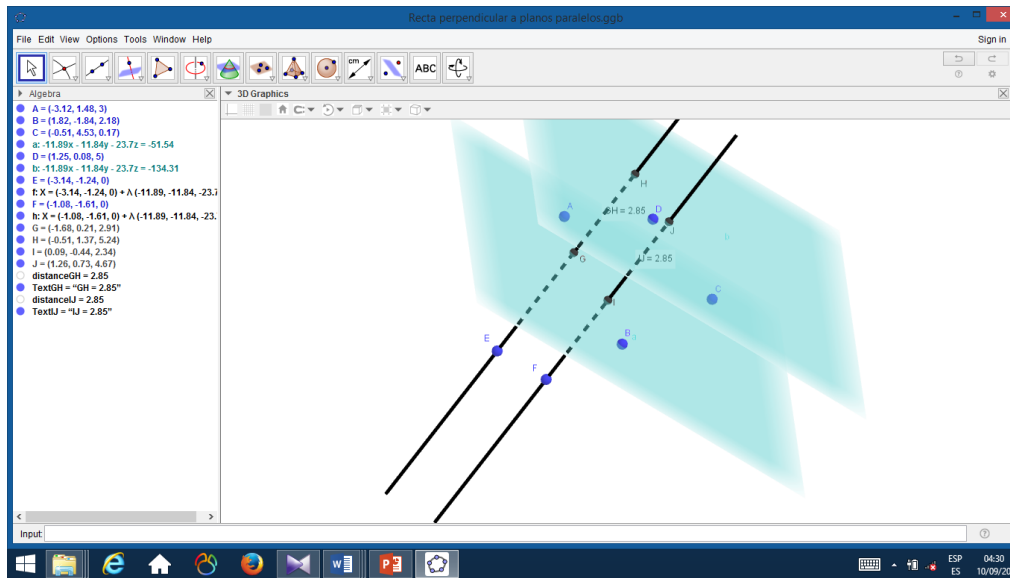


### Ejemplo 3

Las relaciones de posición y relaciones métricas entre rectas y planos se tratan en 12<sup>o</sup> grado y se sistematizan y profundizan en la disciplina de Geometría en la Licenciatura en Educación Matemática. El ejemplo que se presenta puede ser utilizado para obtener tales relaciones en cualesquiera de los niveles mencionados.

Considere los puntos A, B, C, D, E y F, tales que los puntos D, E y F no están contenidos en el plano determinado por los puntos A, B y C.

- Represente el plano  $\alpha$ , determinado por los puntos A, B y C.
- Represente el plano  $\beta$ , paralelo al plano  $\alpha$  y que pasa por el punto D.
- Represente las rectas f y h, perpendiculares al plano  $\alpha$  por los puntos E y F respectivamente.
- Analice la posición relativa de las rectas f y h.
- Determine los puntos de intersección de cada recta con cada uno de los planos.
- Compare las longitudes de los segmentos delimitados por estos pares de puntos.
- Mueva los planos y las rectas y analice si se mantiene la relación obtenida anteriormente ¿A qué conclusión puede llegar?



#### Ejemplo 4

Los estudiantes que cursan los estudios de la Licenciatura en Educación. Matemática, durante el desarrollo del Plan E, reciben una amplia preparación en cuanto al tratamiento de los dos enfoques propios de esta disciplina: el sintético y el analítico. En el colectivo de carrera de la mencionada universidad se ha considerado conveniente de completar la formación geométrica de los estudiantes mediante la profundización en la utilización del método analítico como otra vía de solución de ejercicios y problemas relativos a movimientos, homotecias y semejanzas.

El estudio de estas transformaciones ha sido reincorporado a los programas de Matemática de la Enseñanza Media, por tanto resulta de gran utilidad para la formación profesional del estudiante incorporar otra visión para el tratamiento de los contenidos correspondientes.

Teniendo en cuenta lo anterior, se ha decidido incorporar al currículo propio una asignatura denominada Transformaciones geométricas, que forma parte del Currículo Propio asociado a la Disciplina Geometría en el Plan de Estudio E, para la formación de profesores para la Enseñanza Media en el área de Ciencias Exactas, para el perfil de Matemática.

Entre los objetivos generales de esta asignatura se encuentra el siguiente: Utilizar el asistente GeoGebra para la aplicación de transformaciones afines, movimientos, homotecias y semejanzas a figuras geométricas, para la obtención o comprobación de propiedades relativas a ellos y para el cálculo de magnitudes asociadas a ellas.

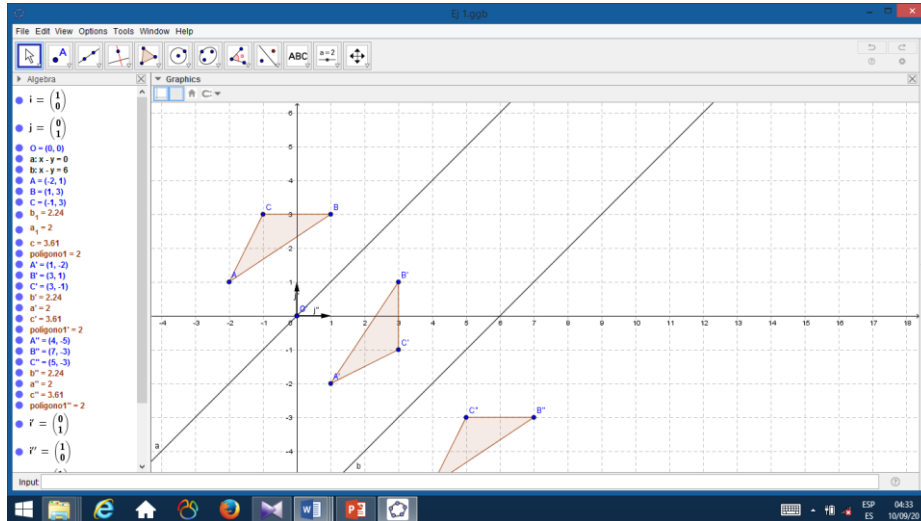
A continuación, presentamos la obtención del teorema: *Si  $m$  y  $n$  son rectas paralelas y*

$$|\vec{a}| = 2d(m, n), \text{ entonces } \sigma_m \circ \sigma_n = \tau_{\vec{a}}.$$

Considere el triángulo ABC con A(-2,1), B(1,3), C(-1,3) y las rectas a:  $x-y=0$  y b:  $x-y=6$ .

- Determine la imagen del triángulo ABC por la composición de las reflexiones de ejes a y b.
- Determine el planteamiento analítico de ambas reflexiones.

- c) Obtenga el planteamiento analítico de este movimiento a partir de la composición de las reflexiones realizadas.
- d) Identifique el movimiento que se obtiene de la composición de las reflexiones de ejes a y b.



## Conclusiones

En la Geometría tiene especial importancia el uso de los asistentes informáticos, dadas sus potencialidades para lograr la visualización y el análisis de múltiples casos particulares que pueden conducir a la determinación de regularidades, a partir del dinamismo que aportan a las diferentes situaciones geométricas que se pueden presentar.

Resulta de especial importancia la determinación de los impulsos que se requieren para conducir a los estudiantes al cumplimiento del objetivo que se persigue, de manera que se eleve su participación productiva en la elaboración de los nuevos conocimientos.

El asistente Geogebra posee numerosas potencialidades para el logro de estos fines, por lo que se requiere continuar el trabajo científico metodológico de la disciplina en la determinación de los temas en los cuales es posible su aplicación y la elaboración de propuestas que permitan aprovechar al máximo las posibilidades de este asistente.

## Referencias bibliográficas

Acosta, S (2018) Libro de texto de Matemática Octavo grado. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.

Álvarez, M y otros (2014) El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Documentos metodológicos. Editorial Pueblo y Educación.

Cherbakov, S y otros (1991) Geometría Analítica II. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.

Coro, F (2019) Estrategia didáctica para el desarrollo del pensamiento geométrico – espacial en la formación del profesor de Matemática. Tesis doctoral. UCPEJV. La Habana.

- González, MC (2006) Propuesta didáctica para la aplicación de la enseñanza basada en problemas a la formación semipresencial en la disciplina de Geometría. Tesis doctoral. UCPEJV. La Habana.
- González, MC (2016) Programa de la asignatura propia Transformaciones Geométricas para la carrera Licenciatura en Educación en la Especialidad Matemática. UCPEJV.
- González, M. C. (2019) El empleo de los asistentes matemáticos y otros recursos informáticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría en la formación de profesores de Matemática. Editorial Educación Cubana ISBN 978-959-18-1272-8. Año 2019.
- González, M. C., Martín, Y. (2019) Una estrategia para el trabajo con GeoGebra en la disciplina de Geometría en la carrera de Educación Matemática. Editorial Educación Cubana ISBN 978-959-18-1272-8.
- González M.C., Rodríguez J.B. (2019) Los conceptos matemáticos y las tecnologías de la información y la comunicación. Editorial EduVarona ISBN 978-959-7254-81-2.
- González, M. C., Martín, Y. (2019) Geometría con GeoGebra en la formación de profesores de Matemática Editorial Educación Cubana ISBN 978-959-16-4341-4.
- Likutu, C (2018) Estrategia didáctica para la comunicación matemática en la formación de profesores para la Enseñanza Primaria en la República de Angola. Tesis doctoral. UCPEJV. La Habana.
- Müller, H (1977). Conceptos Básicos de la Geometría Plana. Tomo 2. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.
- Pérez, MM (2016) Estrategia de superación para el desempeño profesional didáctico del metodólogo municipal de Matemática de la Enseñanza Media. Tesis doctoral.
- Rodríguez, F y otros (2018) Libro de texto de Matemática Undécimo grado. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.
- (s/f) Cómo GeoGebra. Documento en soporte digital del curso GeoGebra en la enseñanza de las Matemáticas.
- (s/f) Manual de GeoGebra. Documento en soporte digital del curso GeoGebra en la enseñanza de las Matemáticas.